Engastamento em Lajes Treliçadas



Lajes treliçadas são as mais comuns nas construções brasileiras de médio e pequeno porte

Aprenda como é possível economizar aço e reduzir deslocamentos através do efeito favorável do engastamento nesse tipo de laje

Autor: Pedro Henrique Lelis Brito

Clique nas imagens abaixo para acessar:

Canal no YouTube



@eng.estruturas

Redes Sociais

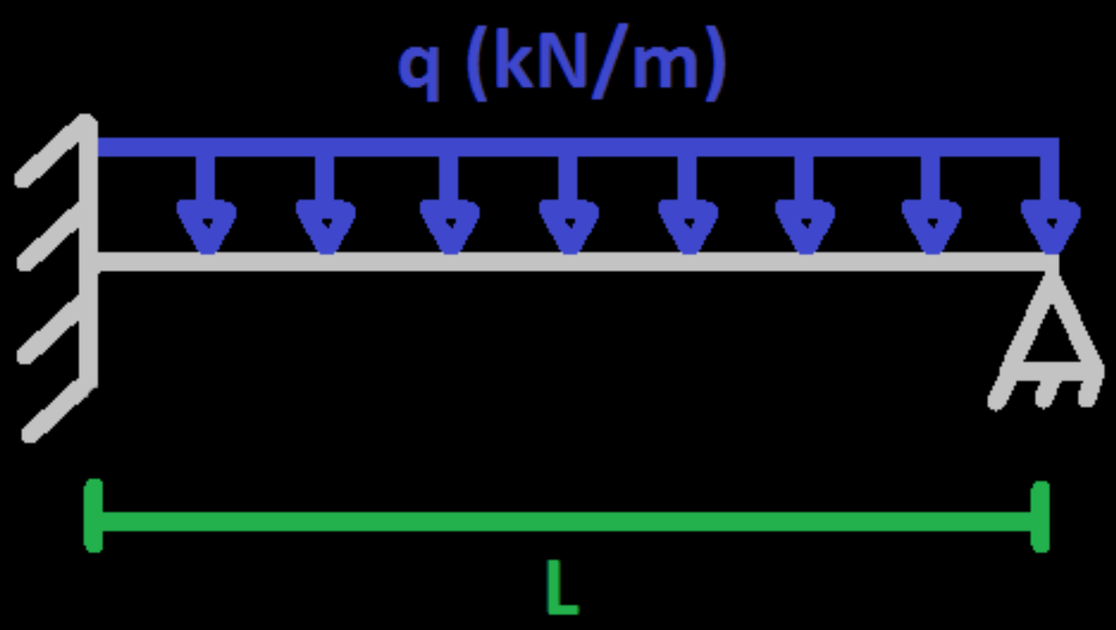


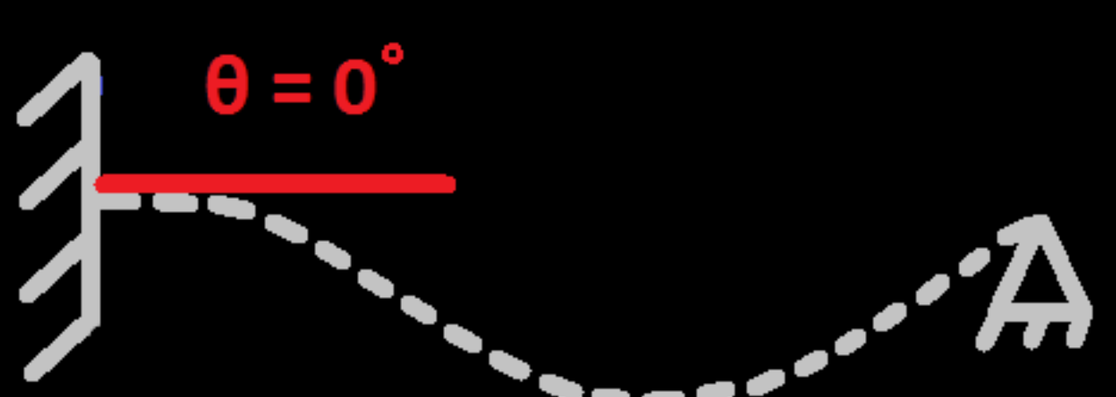
@eng.estruturas

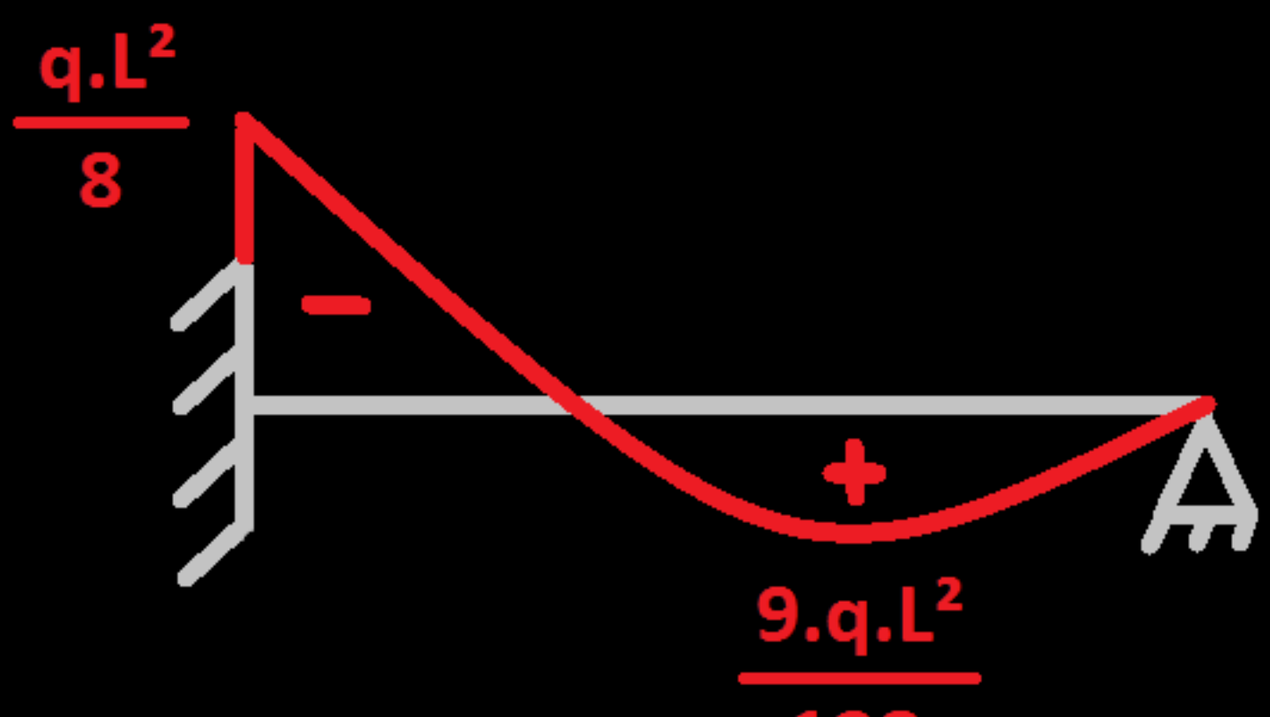


@engenhariaestruturas

Por definição, um apoio perfeitamente engastado não permite nenhuma rotação. Dessa forma, a reta tangente no engaste deve ter inclinação nula



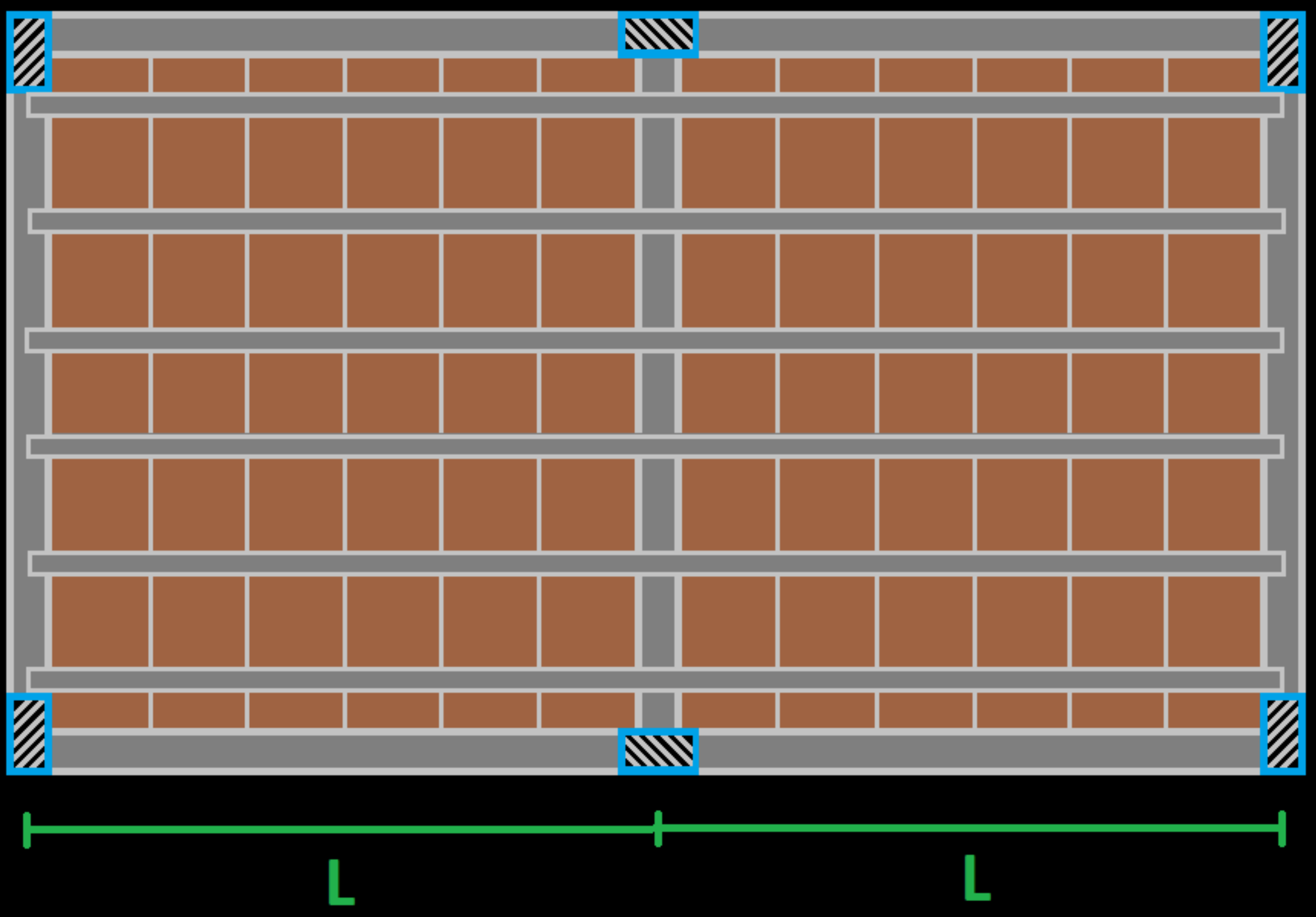


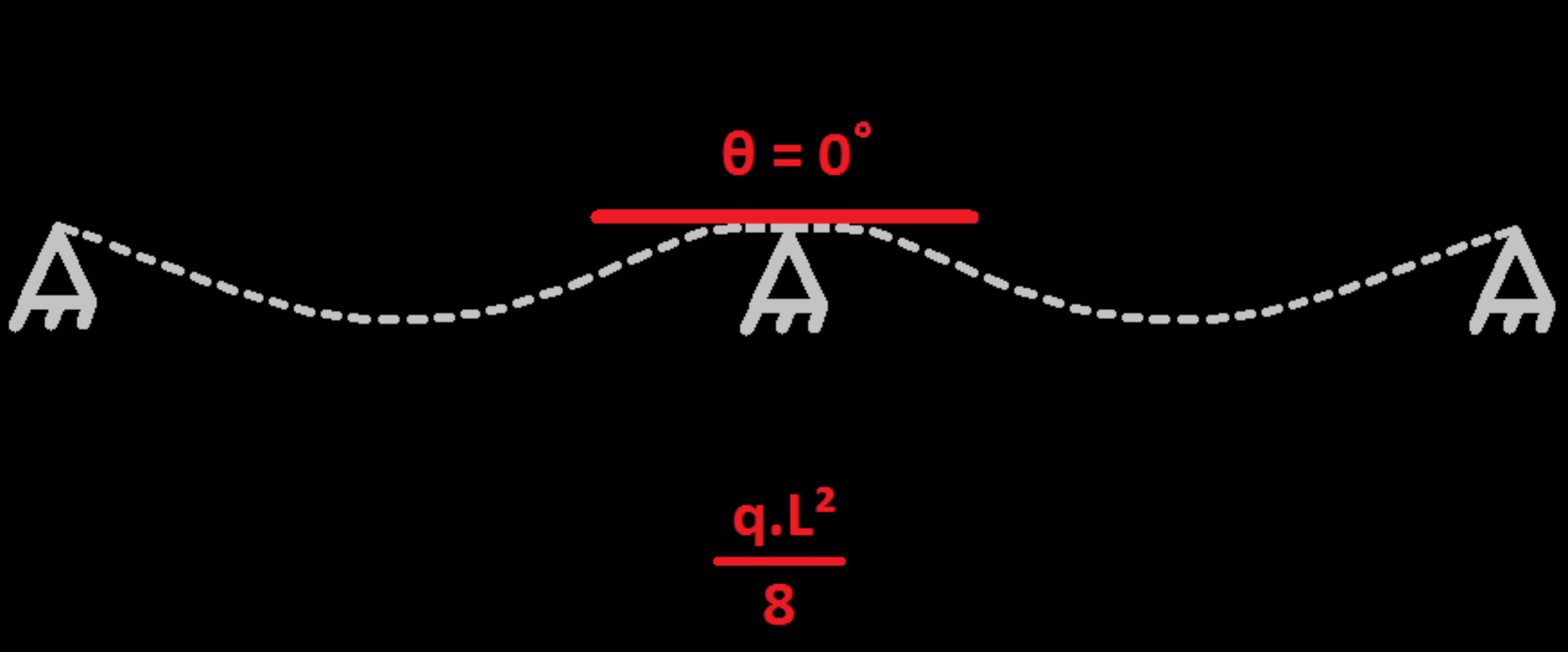


Conforme mostra as figuras acima, uma viga submetida a um carregamento uniformemente distribuído e com uma das extremidades perfeitamente engastada e a outra simplesmente apoiada possui momentos fletores positivo e negativo iguais a:

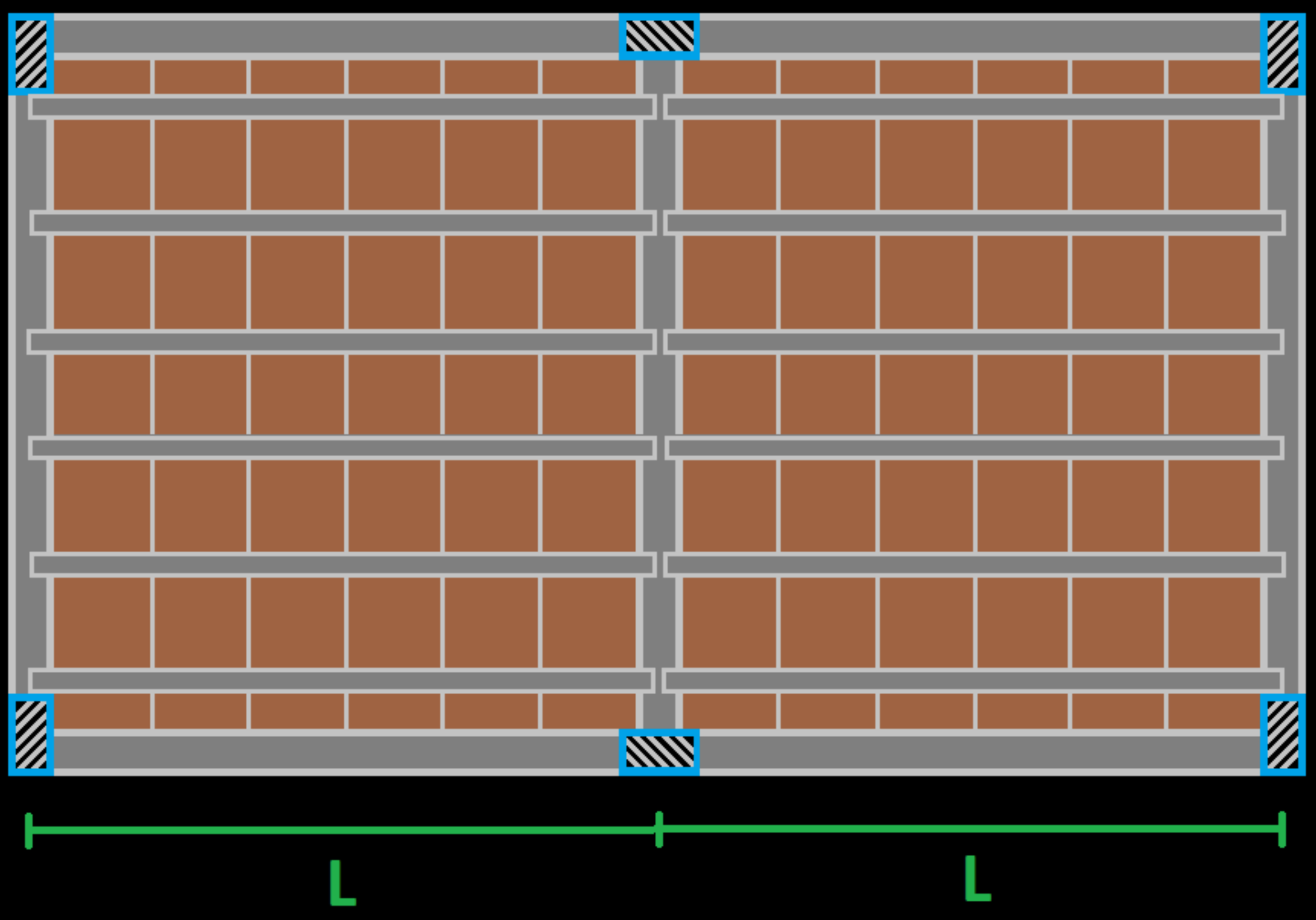
$$M_{pos} = \frac{9.q.L^2}{128} \qquad M_{neg} = \frac{q.L^2}{8}$$

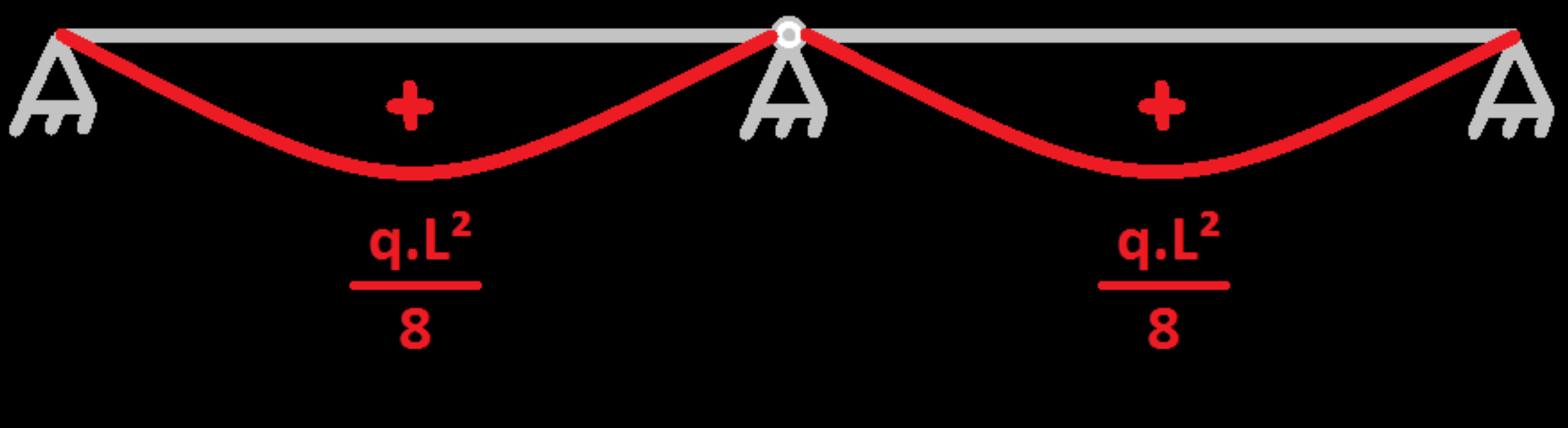
Supondo que duas lajes treliçadas adjacentes estejam submetidas a mesma carga total e tenham vãos iguais, a continuidade entre elas se comportará como um engaste perfeito desde que não ocorra a fissuração do concreto (Ver figuras abaixo)





Se as lajes não forem contínuas sobre o apoio intermediário, as duas extremidades irão se comportar como rótulas e o momento fletor positivo assumirá seu valor máximo





Perceba que o engastamento permite reduzir em até 43,75% o momento fletor positivo da laje

$$\Delta\% = \frac{\frac{1}{8} - \frac{9}{128}}{\frac{1}{8}} = 0{,}4375 = 43{,}75\%$$

Como a área de aço é diretamente proporcional ao momento fletor, sua redução também é de 43,75%

Então por que alguns autores sugerem não calcular as lajes considerando o engastamento entre elas?

A resposta é: Na prática é muito difícil saber qual será o grau de engastamento da continuidade. Em geral, ela se comporta como um engaste elástico ou semi-rígido, o que significa que permite uma certa rotação naquele ponto

Dessa forma, o momento fletor negativo e positivo máximo podem assumir qualquer valor dentro dos intervalos abaixo:

$$0 \leq M_{neg} \leq \frac{q.L^2}{8}$$

$$\frac{9.q.L^2}{128} \leq M_{pos} \leq \frac{q.L^2}{8}$$

Logo, considerar as extremidades da laje simplesmente apoiadas ($M_{neg} = 0$) conduz ao dimensionamento mais seguro possível, embora também seja o mais oneroso

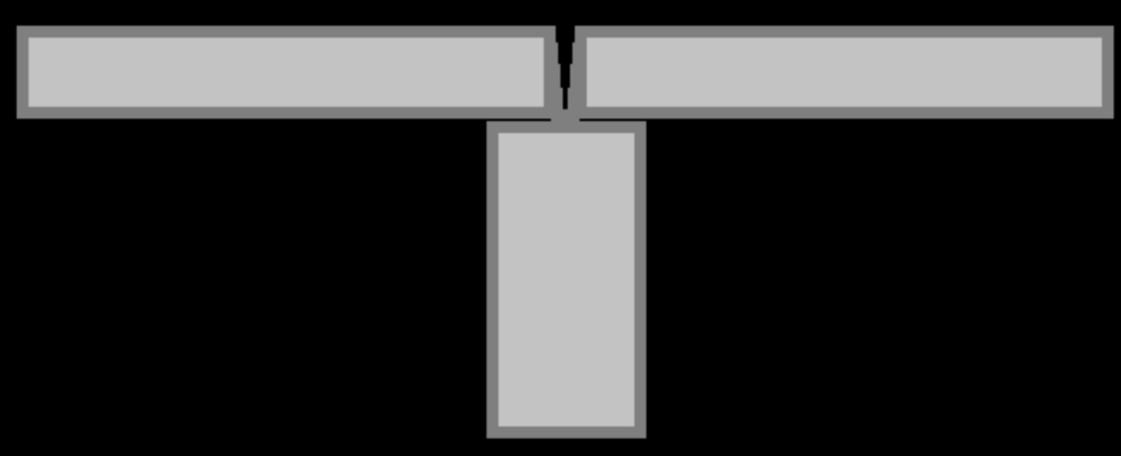
$$M_{neg} = 0 \longrightarrow M_{pos} = \frac{q.L^2}{8}$$

Não me entenda mal: a armadura negativa pode ser adicionada para controlar a fissuração, mas a armadura positiva deve ser calculada com o maior momento fletor

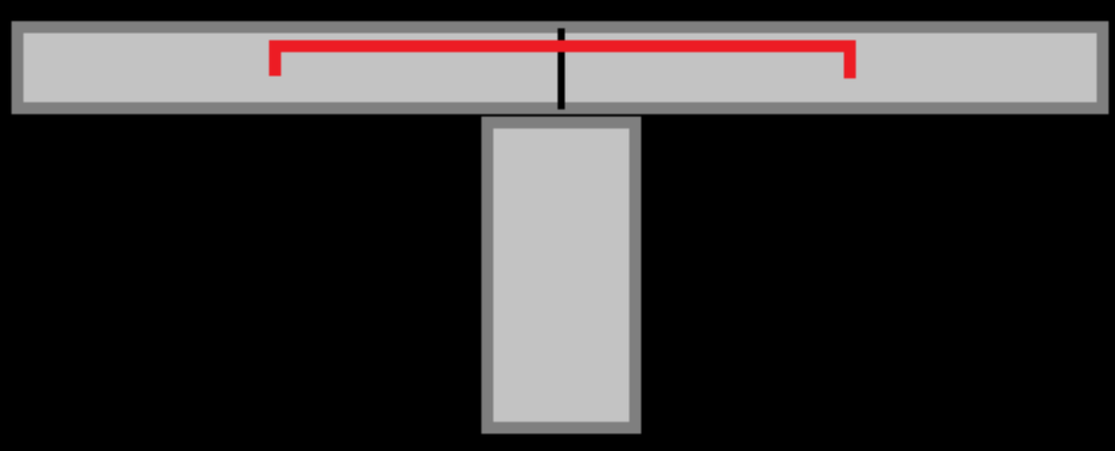
Mas por que não é possível garantir um engastamento perfeito entre as lajes?

1º Motivo: O concreto apresenta pouca resistência aos esforços de tração, o que implica no surgimento de fissuras mesmo para momentos fletores de baixa intensidade (Ver fórmula do momento de fissuração no item 17.3.1 da NBR 6118:2014)

A presença de armadura no engaste limita a abertura das fissuras, mas não impede o seu surgimento



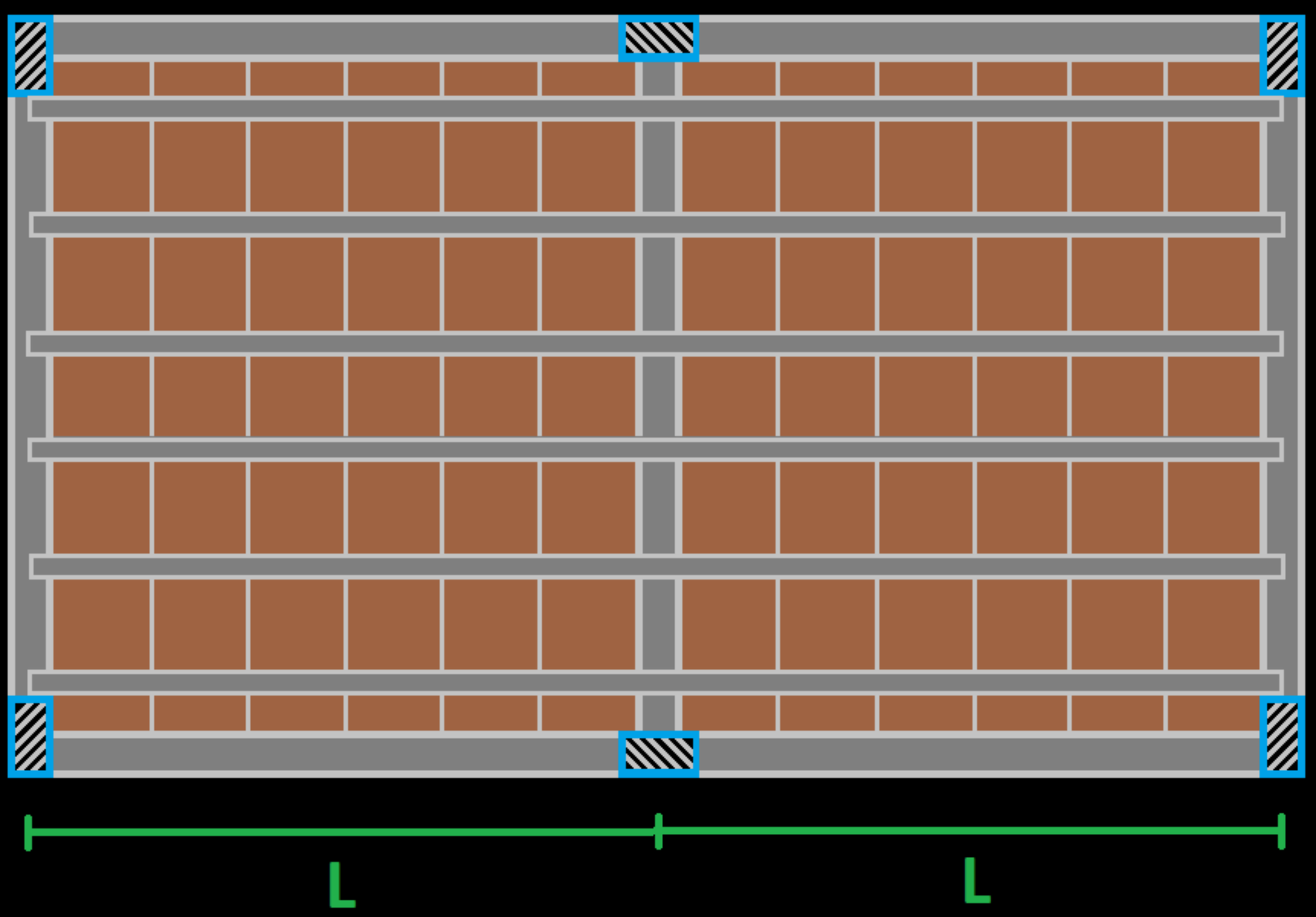
a) Ligação fissurada (Extremidades livres para girar)

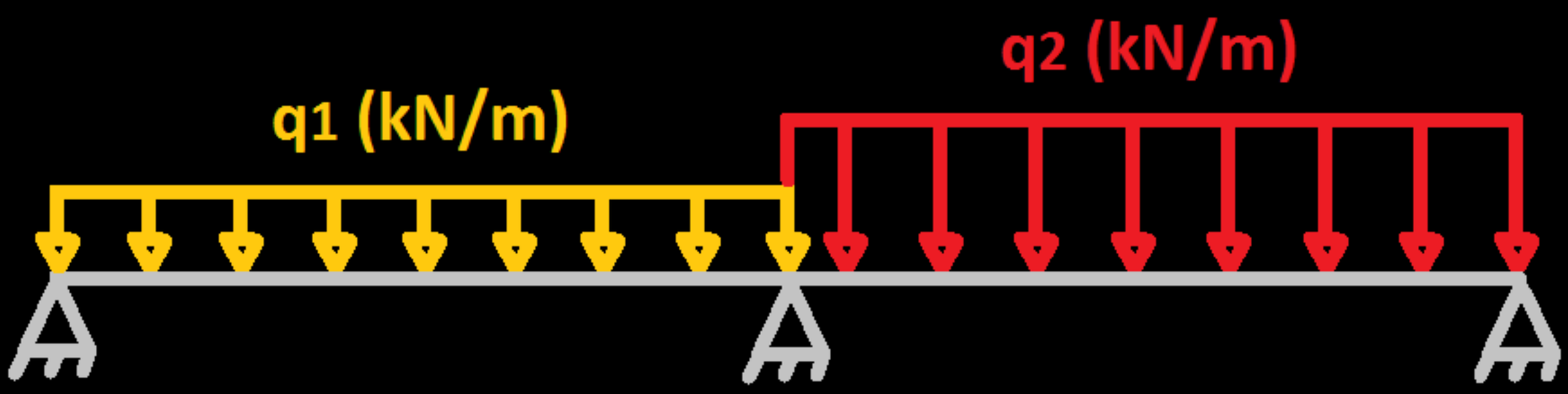


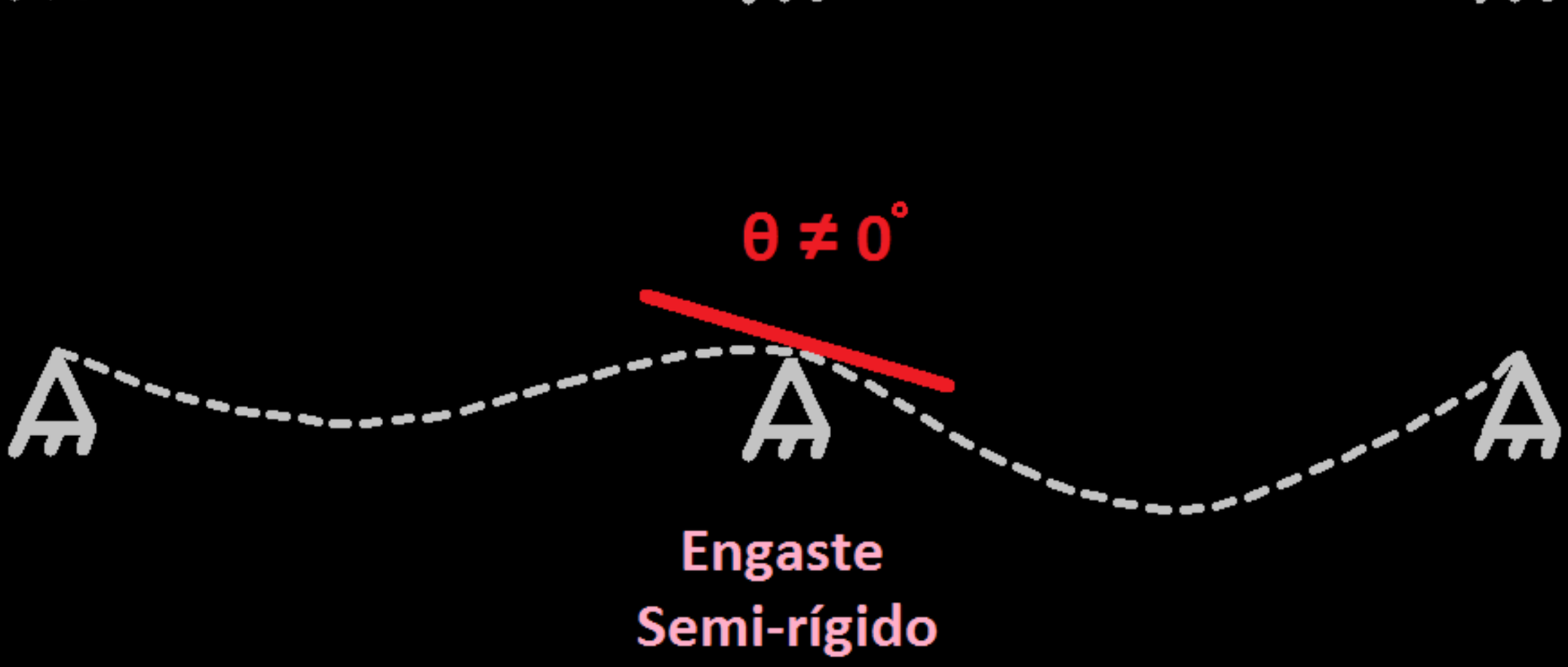
b) Ligação com armadura negativa (Extremidades com certa restrição ao giro - Engaste semi-rígido)

2º Motivo: Durante a vida útil da estrutura as lajes podem ficar submetidas a cargas diferentes, o que provocaria deformações diferentes e uma rotação na continuidade entre elas

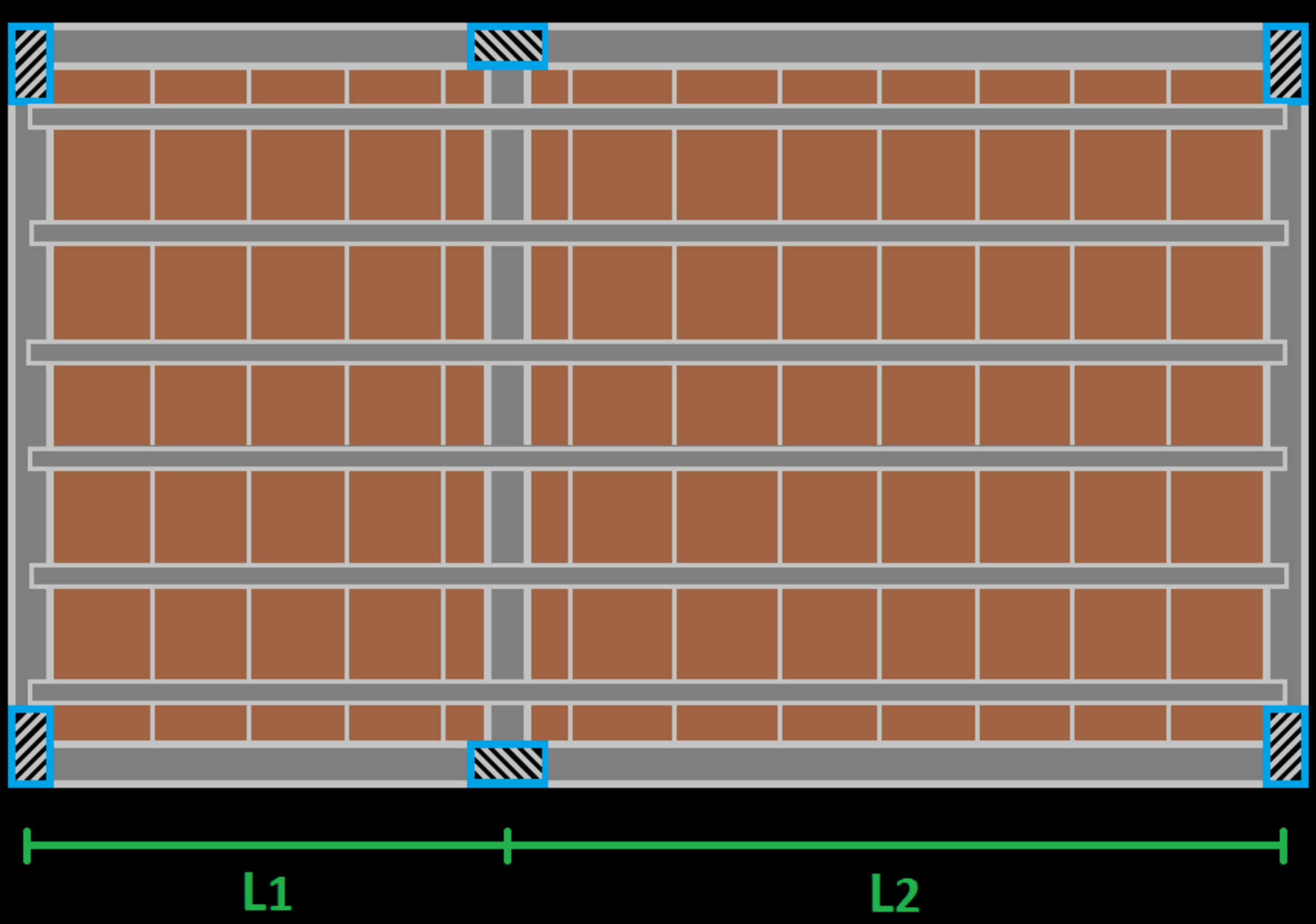
Suponha, por exemplo, que a laje da esquerda mostrada logo abaixo esteja submetida apenas a carga permanente e a laje da direita esteja submetida a carga permanente + carga variável





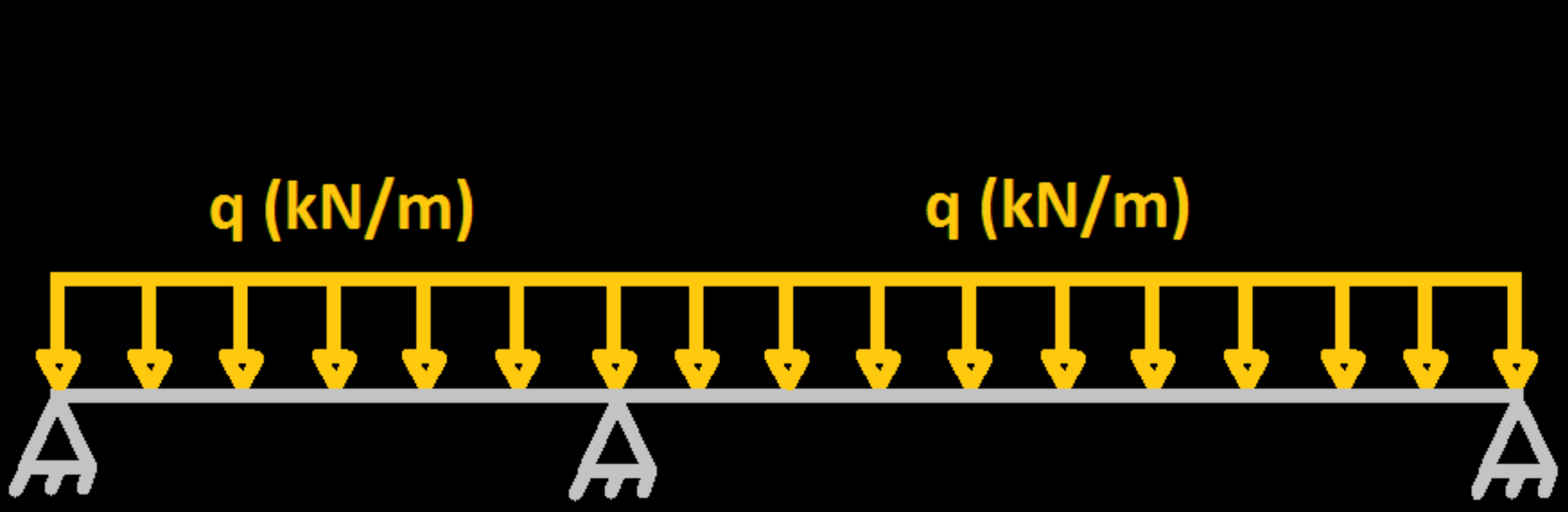


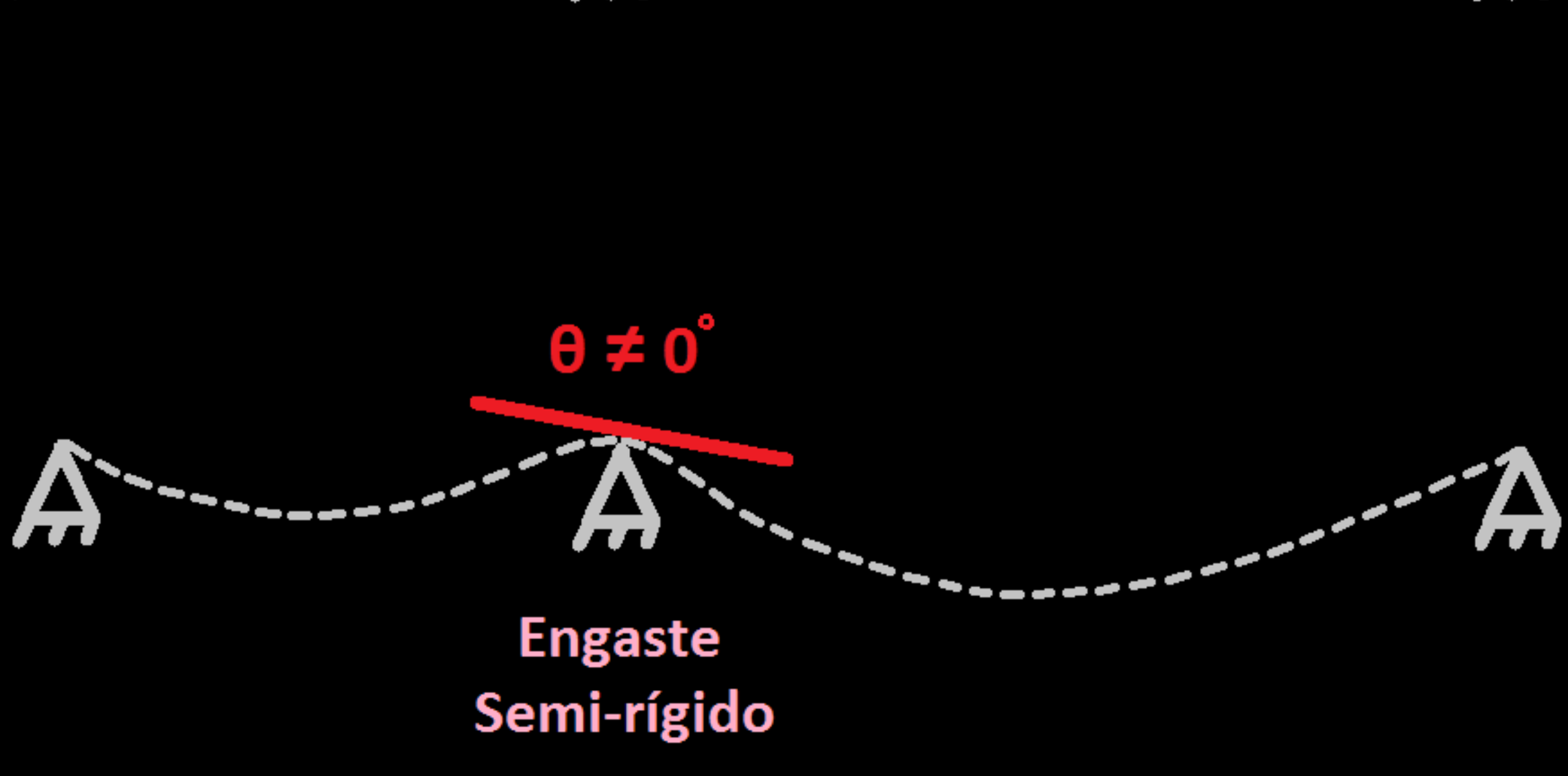
3º Motivo: Se as lajes tiverem cargas iguais, mas vãos com comprimentos diferentes, as deformações também serão diferentes, o que implica na rotação da continuidade



q (kN/m)

q (kN/m)

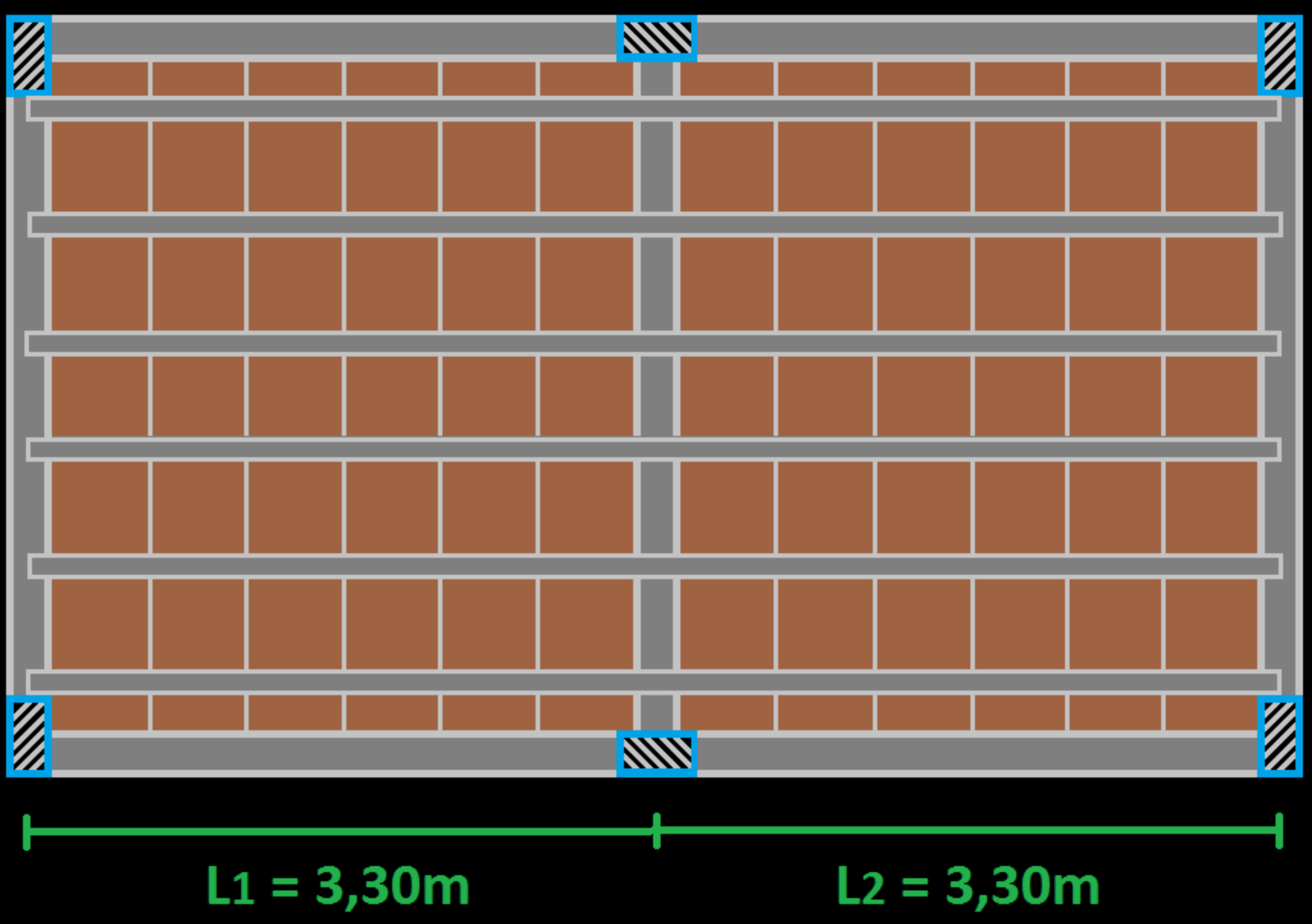




Engaste
Semi-rígido

A seguir será mostrado como os momentos fletores de duas lajes treliçadas adjacentes com engaste semi-rígido podem ser obtidos com o auxílio do Ftool

Para isso, iremos considerar uma das lajes submetida apenas a carga permanente de 3,57kN/m² e a outra submetida a mesma carga permanente + uma carga variável de 1,5kN/m². Além disso, será considerado que as vigotas possuem uma área de influência com largura de 42cm, que corresponde a distância entre o centro de dois blocos de enchimento adjacentes (Ver item 14.6.2.2 da NBR 6118:2014)



Para encontrar o carregamento distribuído sobre as vigotas, basta multiplicar a carga pela largura da área de influência. Logo,

$q_1 = 3,57 . 0,42 = 1,50 kN/m$ $q_2 = 5,07 . 0,42 = 2,13 kN/m$

ESQUEMA ESTÁTICO DAS VIGOTAS:

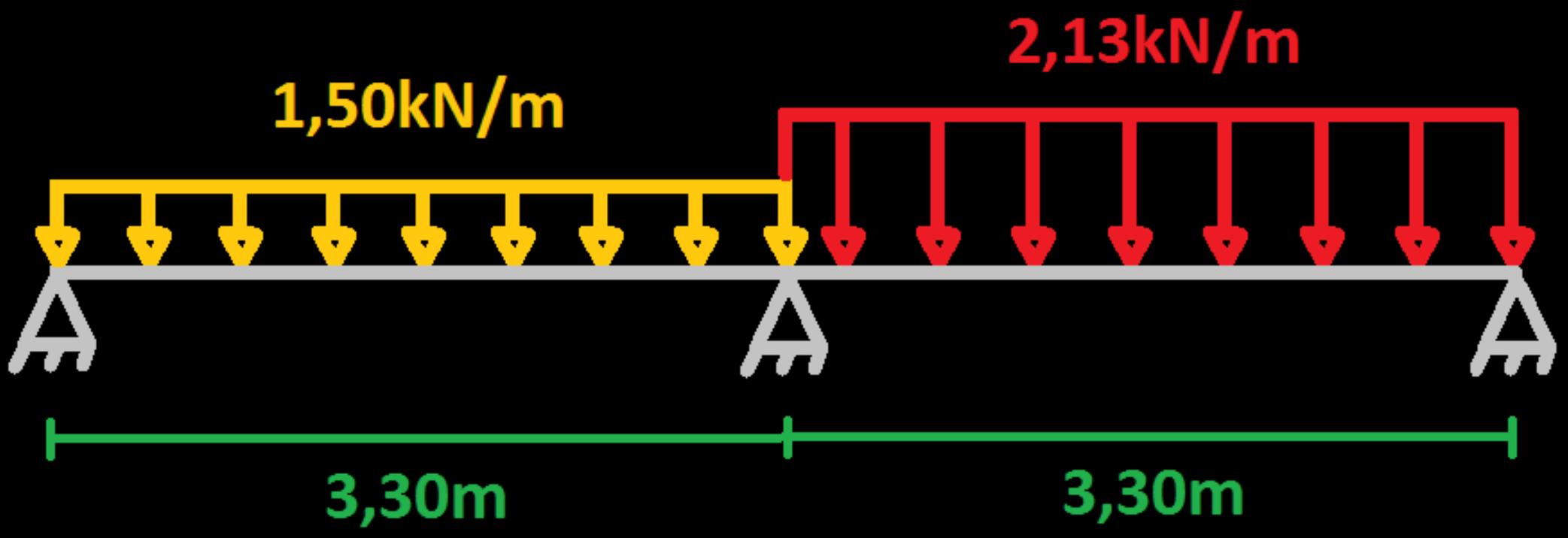
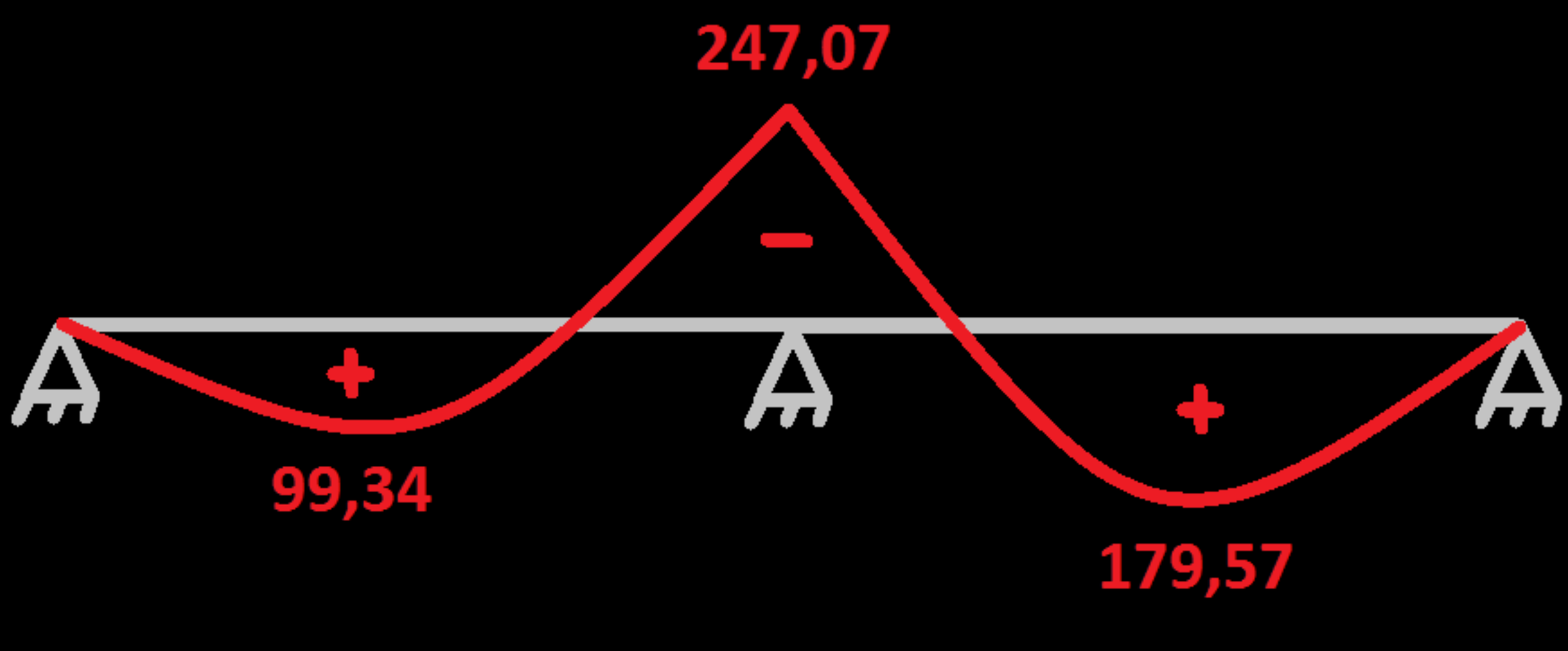


DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR (kNcm):



Se a laje da direita tivesse sido calculada como biapoiada o momento fletor positivo máximo seria:

$$M_{pos} = \frac{q.L^2}{8} = 289{,}95 kNcm$$

Portanto, o engastamento desse exemplo permite reduzir em até 38,07% o momento fletor positivo

$$\Delta\% = \frac{289{,}95 - 179{,}57}{289{,}95} = 0{,}3807 = 38{,}07\%$$

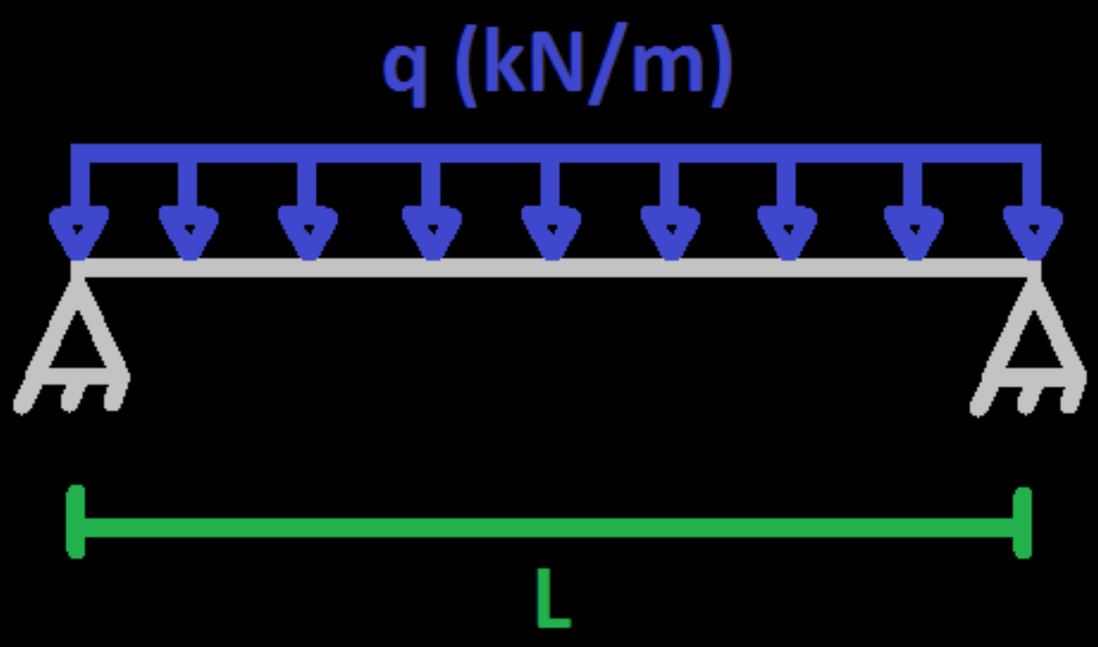
Tenho uma planilha que calcula lajes treliçadas biapoiadas e que permite a redução do momento fletor positivo caso o usuário queira considerar o efeito favorável do engastamento

Isso pode ser feito alterando o valor da célula indicada com a seta vermelha:

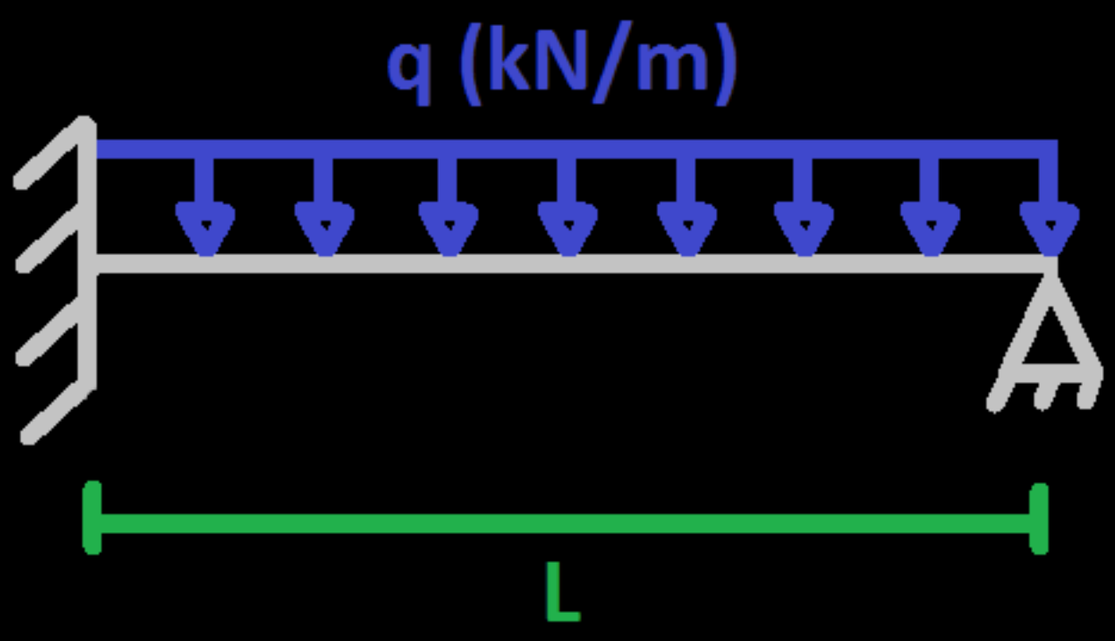
Saída de dados	
Peso próprio da laje (kN/m²)	
1,44	
Carga total (kN/m²)	
4,19	
q (kN/m)	
1,76	
z (cm)	
9,70	
x (cm)	
0,74	
bf (cm)	
42,00	
Esforços solicitantes	
$M_{k,máx}$ (kNcm)	261,82
$M_{d,máx}$ (kNcm)	366,55
Fc (kN)	37,77
Fs (kN)	37,77
As2 (cm²)	
0,40	
Nº de barras complementares	
2	

CLIQUE AQUI PARA CONHECER A PLANILHA

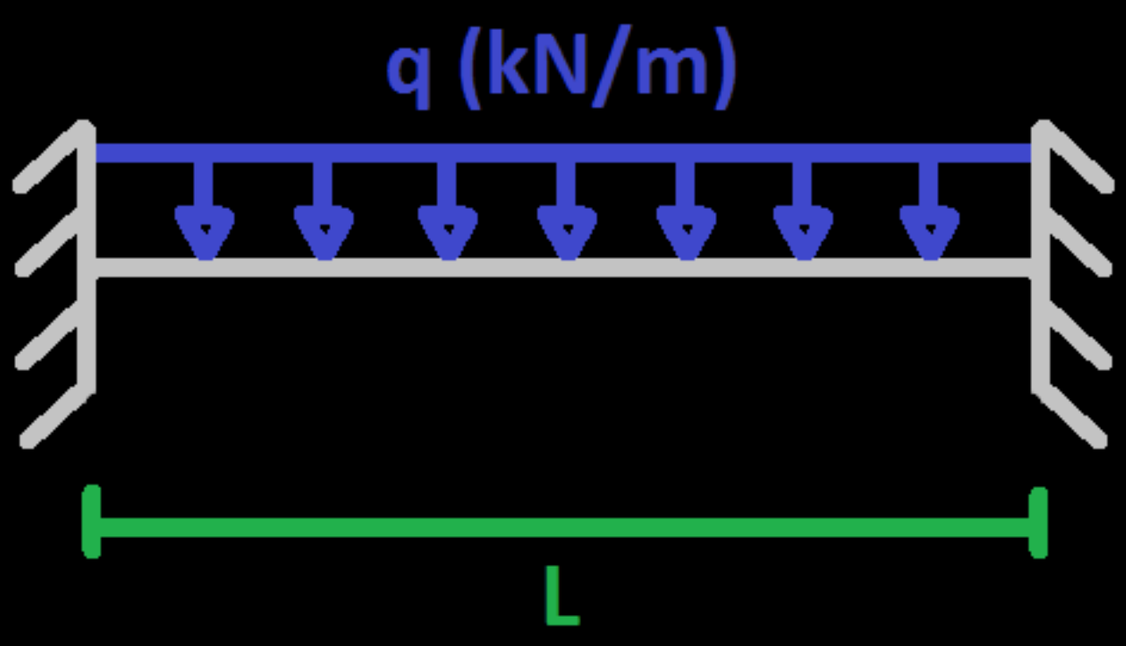
O engastamento também provoca a redução no deslocamento das lajes. Nas figuras abaixo estão indicadas as fórmulas que permitem calcular a flecha imediata em função das condições de apoio



$$\delta i = \frac{5.q.L^4}{384.E.I}$$



$$\delta i = \frac{q.L^4}{185.E.I}$$



$$\delta i = \frac{q.L^4}{384.E.I}$$

Nas fórmulas acima E corresponde ao módulo de elasticidade secante do concreto e I o momento de inércia da seção transversal

Por padrão, minha planilha calcula a flecha para uma laje biapoiada, ou seja, com as extremidades rotuladas

Entretanto, para considerar o efeito favorável do engastamento em uma ou nas duas extremidades, basta alterar a fórmula da célula indicada com a seta vermelha (célula desbloqueada)

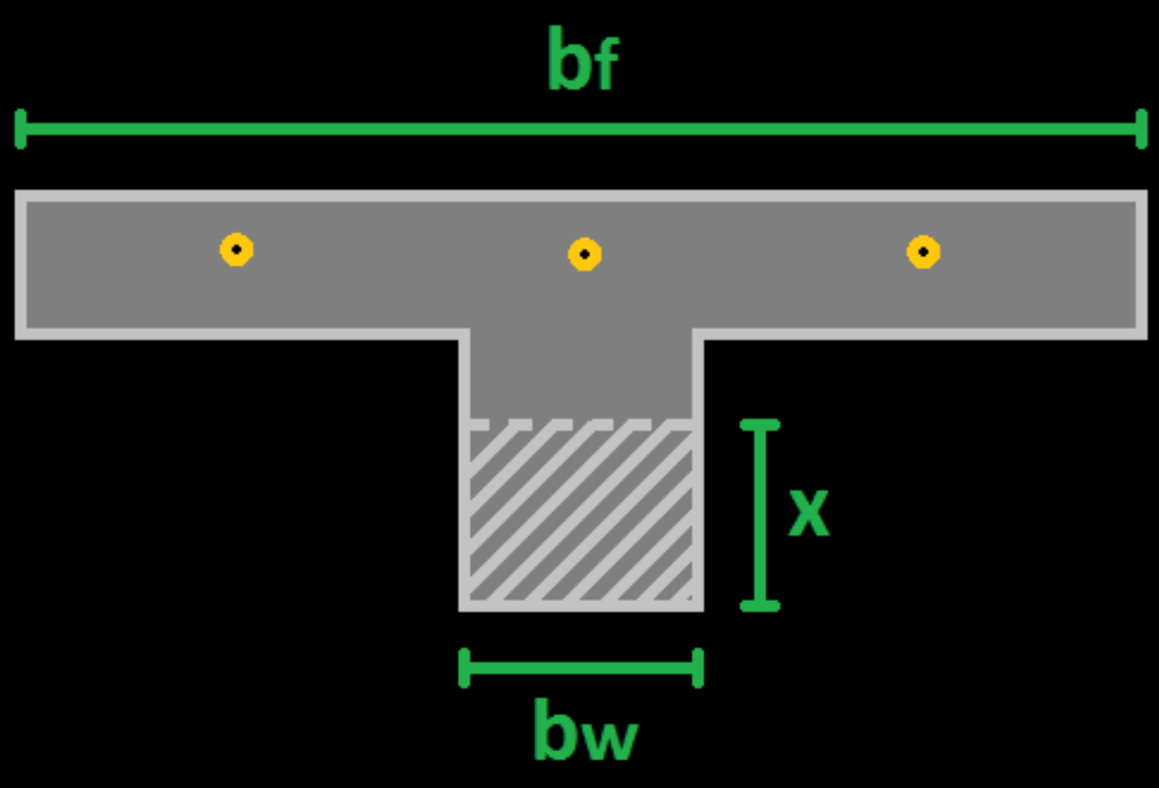
Flecha máxima	
q (kN/m)	1,32
Ecs (MPa)	24150
αe	8,70
x (cm)	1,86
ycg (cm)	3,80
Ic (cm^4)	2422,40
Ih (cm^4)	675,70
Mr (kNcm)	90,93
Ma (kNcm)	196,21
(EI)eq,t0 ($kNcm^2$)	2051660,92
δt0 (cm) =	-0,3143
δt,f (cm) =	1,5547
δtotal (cm)	1,24

OBS.: Na planilha a flecha imediata é representada por δt0. Seu valor aparece negativo na foto acima, pois foi aplicada uma contra-flecha

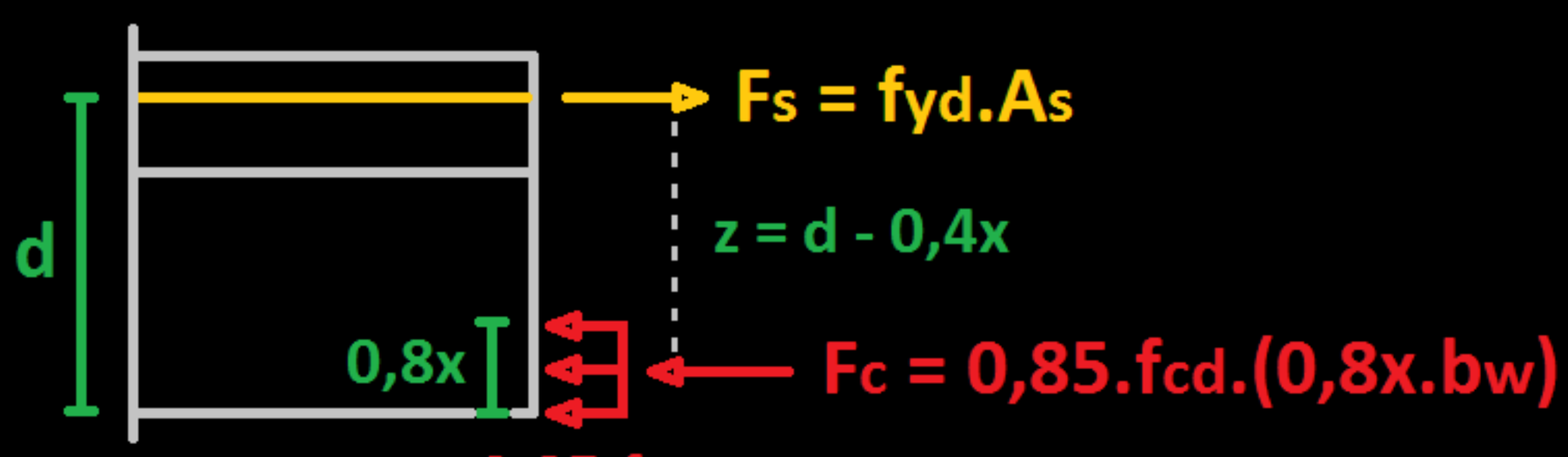
CLIQUE AQUI PARA CONHECER A PLANILHA

CÁLCULO DA ARMADURA NEGATIVA:

Uma laje treliçada pode ser entendida como sendo composta por um conjunto de vigas T posicionadas lado a lado. Dessa forma, o cálculo da armadura positiva e negativa são análogos ao de uma viga



a) Seção T com momento fletor negativo. Note que a armadura é posicionada no banzo superior



b) Trecho de uma viga T representada em perfil

Para que a seção esteja em equilíbrio é necessário que a **força resultante de tração (Fs)** seja igual a **força resultante de compressão (Fc)**. Além disso, o momento fletor do binário formado por Fs e Fc deve ser igual ao momento fletor negativo atuando na seção

OBS.: bf costuma ser a distância entre o centro de dois blocos de enchimento adjacentes (Item 14.6.2.2 da NBR 6118:2014)

CÁLCULO DA ARMADURA NEGATIVA (CONTINUAÇÃO):

Aplicando as condições de equilíbrio, tem-se que:

$$M_{neg,d} = F_c.z = 0,85.f_{cd}.(0,8x.bw).(d - 0,4x)$$

$$M_{neg,d} = -0,272.f_{cd}.bw.x^2 + 0,68.f_{cd}.bw.d.x$$

$$-0,272.f_{cd}.bw.x^2 + 0,68.f_{cd}.bw.d.x - M_{neg,d} = 0$$

A solução da equação do 2º grau acima pode ser encontrada com a fórmula de Bhaskara. Logo,

$$x = \frac{0,68.d \pm \sqrt{(0,68.d)^2 - 1,088.\left(\frac{M_{neg,d}}{bw.f_{cd}}\right)}}{0,544}$$

x corresponde a altura da linha neutra e apenas uma das soluções encontradas com a equação acima é a correta, o que é muito fácil de identificar devido ao valor absurdo de uma delas (Número muito grande ou negativo)

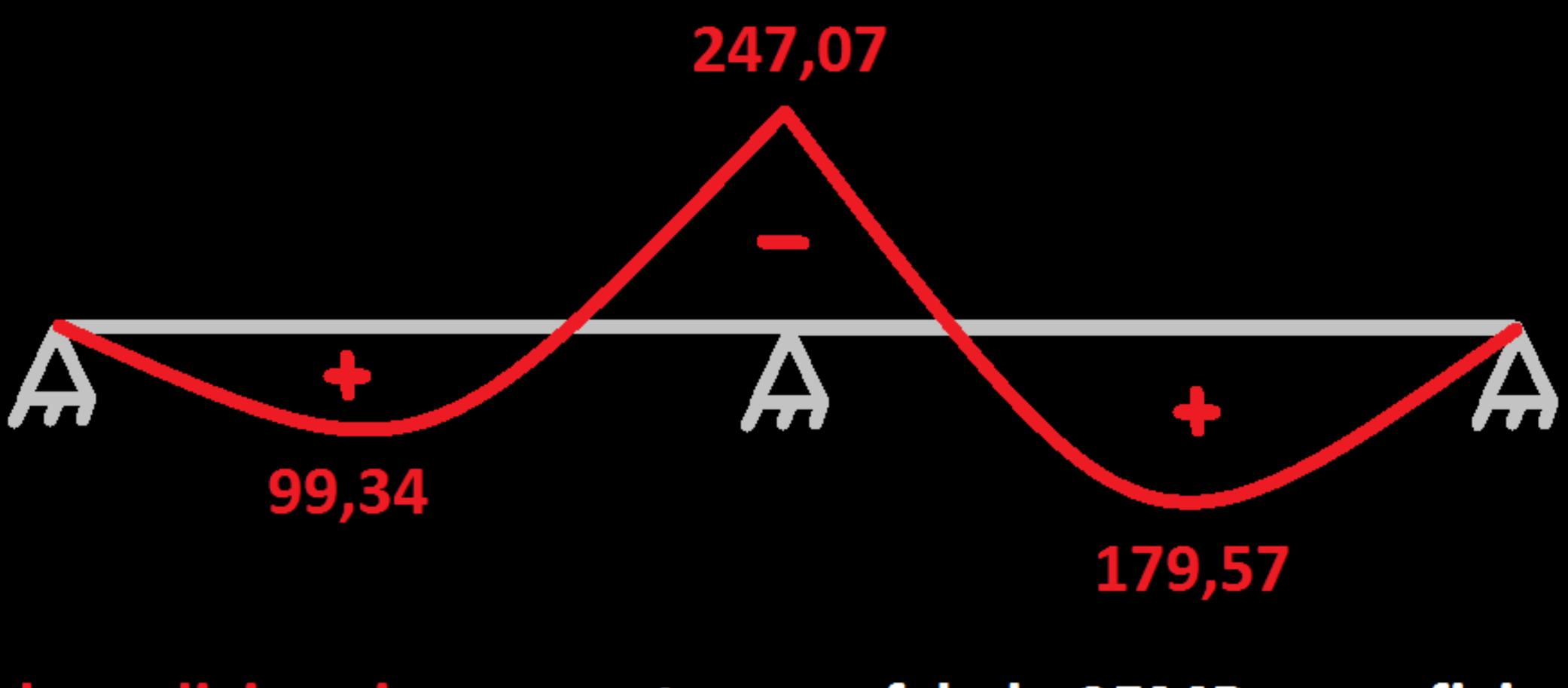
Outra condição para que exista equilíbrio é a de que a força Fc seja igual a Fs. Logo, a área de aço da armadura negativa é igual a:

$$M_{neg,d} = F_s.z = f_{yd}.A_s.(d - 0,4x)$$

$$A_s = \frac{M_{neg,d}}{f_{yd}.(d - 0,4x)}$$

CÁLCULO DA ARMADURA NEGATIVA (CONTINUAÇÃO):

Ex.: Calcule a armadura negativa na continuidade entre 2 lajes adjacentes considerando que as vigotas possuam o diagrama de momento fletor a seguir (DMF em kNcm):



Dados adicionais: concreto com fck de 25MPa; coeficiente de minoração da resistência do concreto e majoração dos esforços igual a 1,4; aço CA-50; coeficiente de minoração da resistência do aço igual a 1,15; b_w = 9cm; d = 10cm

Resolução:

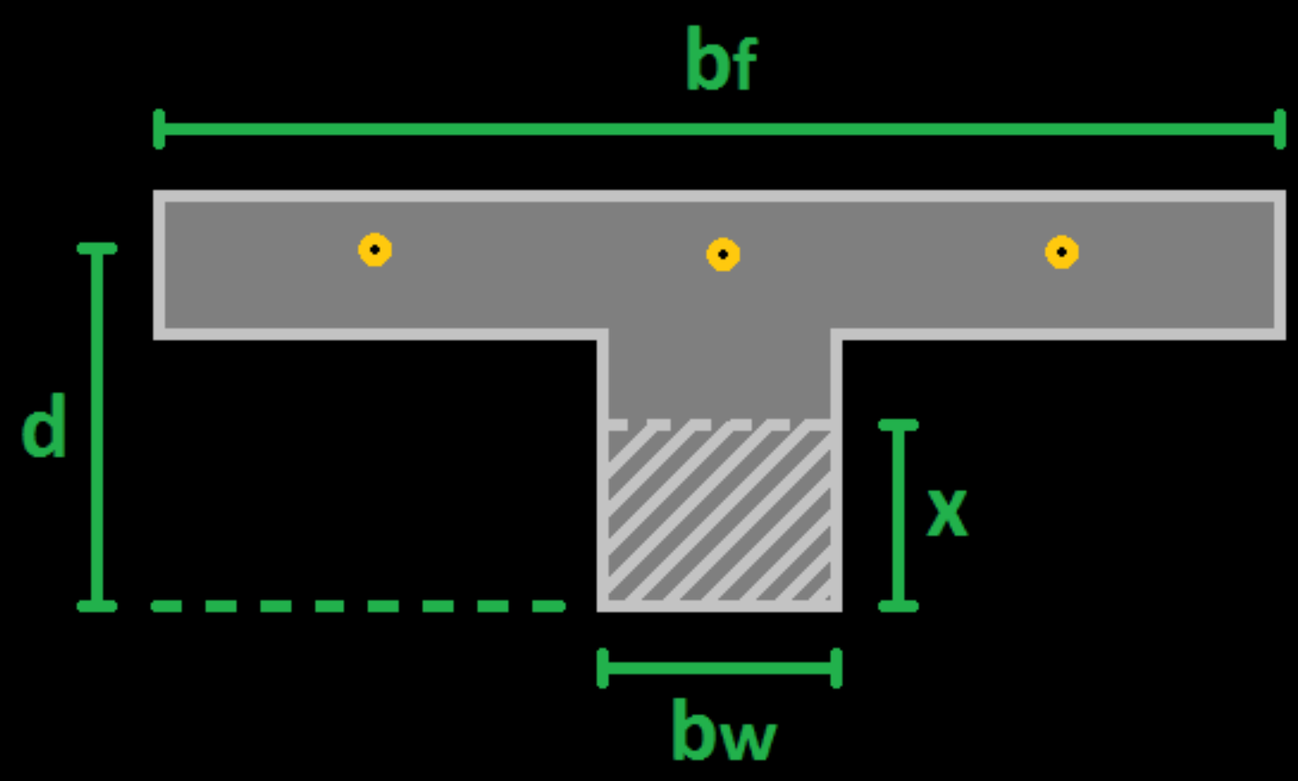
$$x = \frac{0,68.10 \pm \sqrt{(0,68.10)^2 - 1,088.\left(\frac{1,4.247,07}{9.(2,5/1,4)}\right)}}{0,544}$$

x' = 3,72cm e x'' = 21,28cm (Logo, x = 3,72cm)

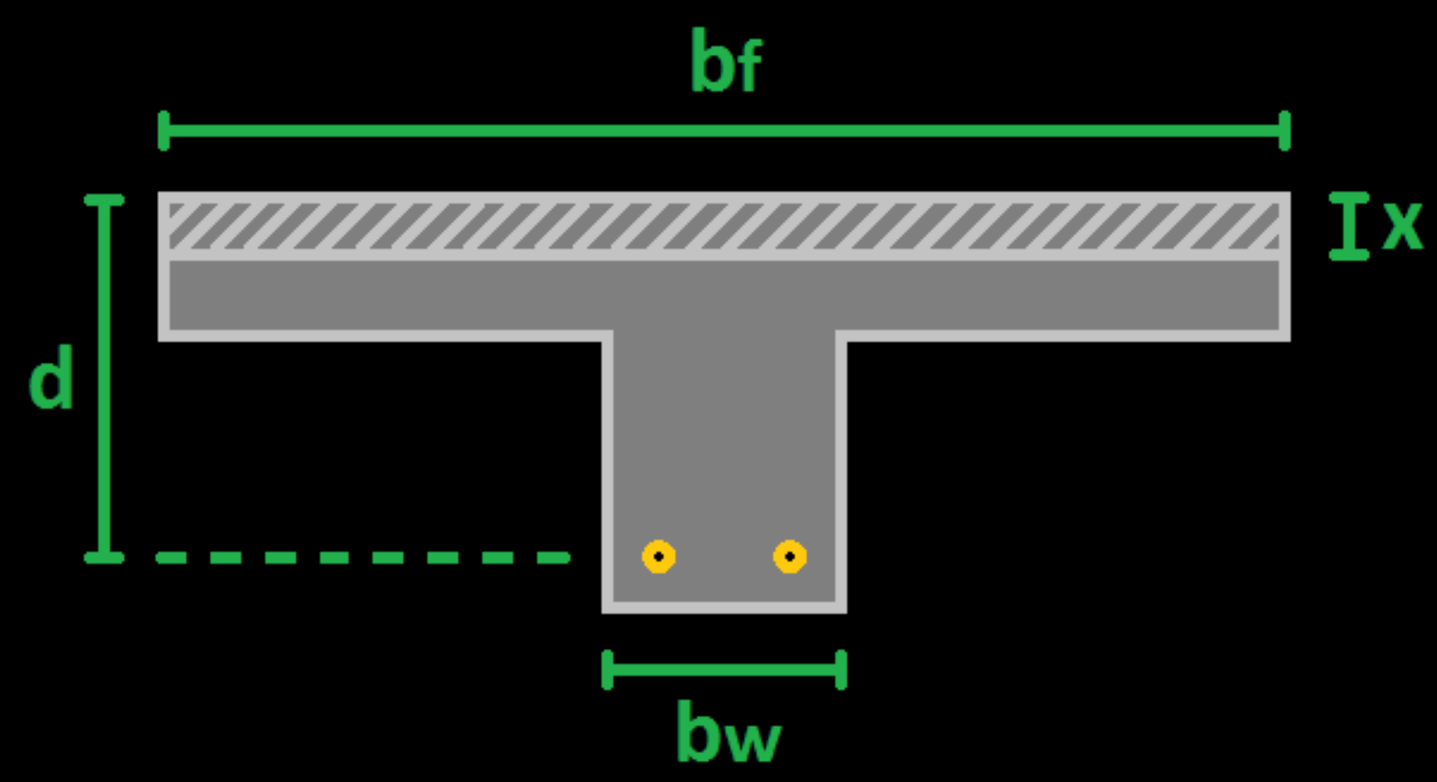
$$As = \frac{1,4.247,07}{(50/1,15).(10 - 0,4.3,72)} = 0,9346cm^2$$

$$Nº\ barras = \frac{0,9346}{\pi.(0,63^2).0,25} \cong 3\ barras\ de\ 6,3mm$$

De acordo com o item 14.6.4.3 da NBR 6118:2014, a razão x/d em lajes e vigas de concreto armado com f_{ck} de até 50MPa deve ser menor ou igual a 0,45. Isso permite garantir um adequado comportamento dútil da seção, o que protege a estrutura contra a ruptura brusca do concreto



a) Seção T com momento fletor negativo

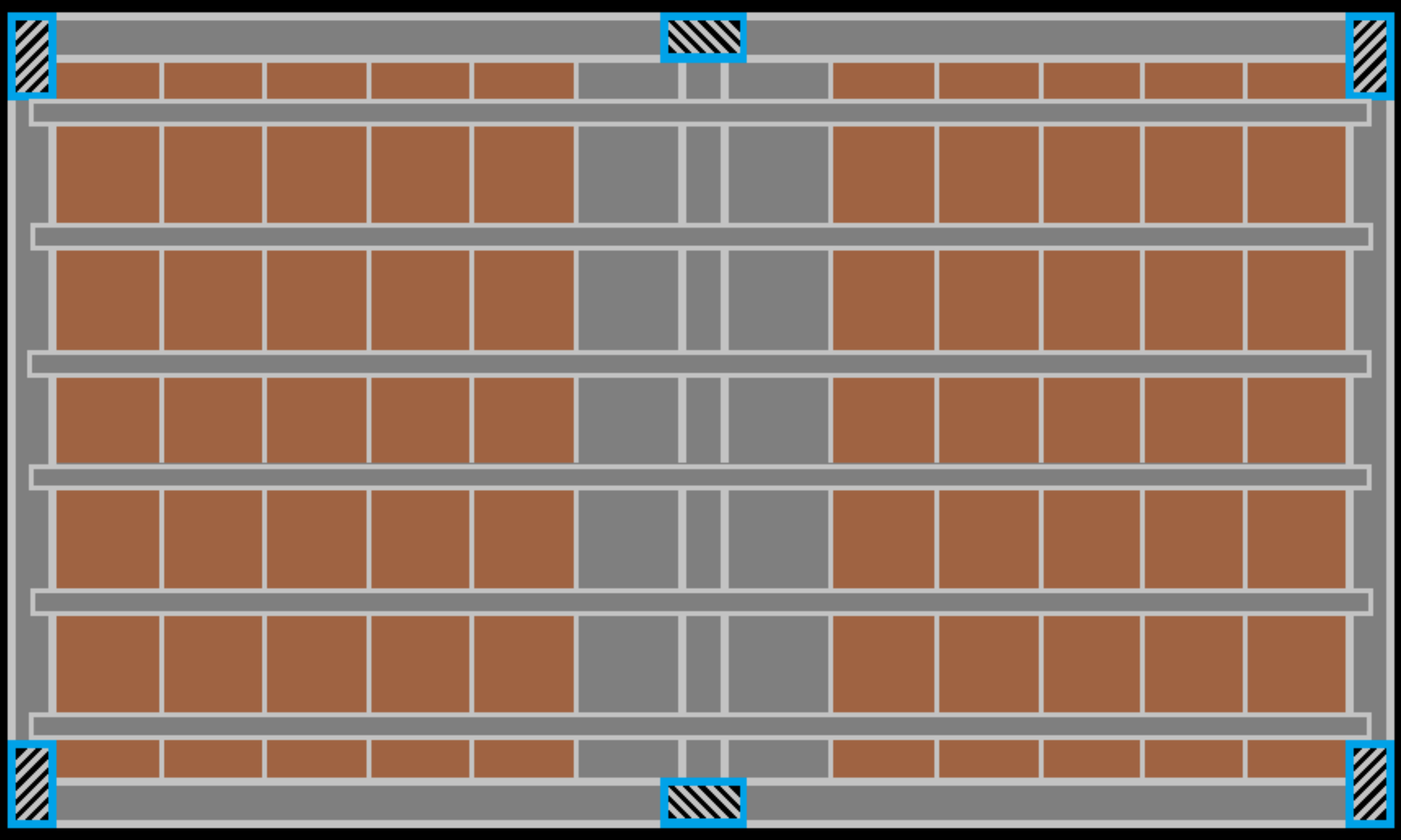


b) Seção T com momento fletor positivo

Analisando as figuras acima é possível concluir que uma seção T com momento fletor negativo apresenta uma região comprimida com altura superior ao de uma seção T com momento fletor positivo (supondo que ambos os momentos fletores tenham a mesma intensidade). Isso ocorre, pois a nervura possui uma largura inferior ao da mesa, o que exige uma altura maior da linha neutra para obter a mesma área de concreto comprimido

Por apresentarem as características mostradas na página anterior, as seções T com momento fletor negativo frequentemente ultrapassam o limite de 0,45 para a razão x/d

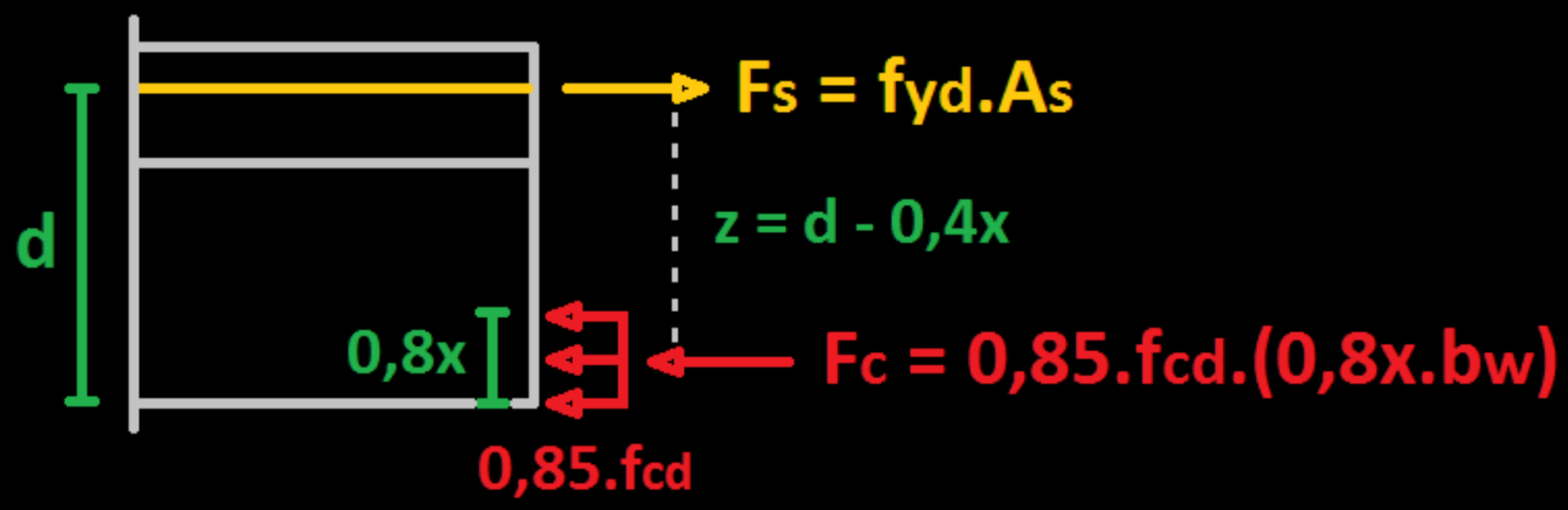
Uma estratégia comumente utilizada para resolver esse problema é remover os blocos de enchimento nas proximidades dos apoios engastados, o que faz com que durante a concretagem essa região seja integralmente preenchida por concreto. Isso aumenta consideravelmente a área de concreto disponível para resistir aos esforços de compressão gerados pelo momento fletor negativo, reduzindo assim a altura da linha neutra



A região maciça de concreto deve ser executada até a seção em que x/d não ultrapasse o limite imposto pela norma

OBS.: Na próxima página será mostrado como obter a largura mínima da região maciça de concreto, ou seja, até que ponto ela deve ser executada

LARGURA MÍNIMA DA REGIÃO MACIÇA DE CONCRETO:



Foi mostrado anteriormente que para existir equilíbrio na seção acima é necessário que o momento fletor do binário formado por Fs e Fc seja igual ao momento fletor negativo. Logo,

$$M_{neg,d} = F_c.z = 0,85.f_{cd}.(0,8x.b_w).(d - 0,4x)$$

Substituindo x por 0,45.d obtemos que:

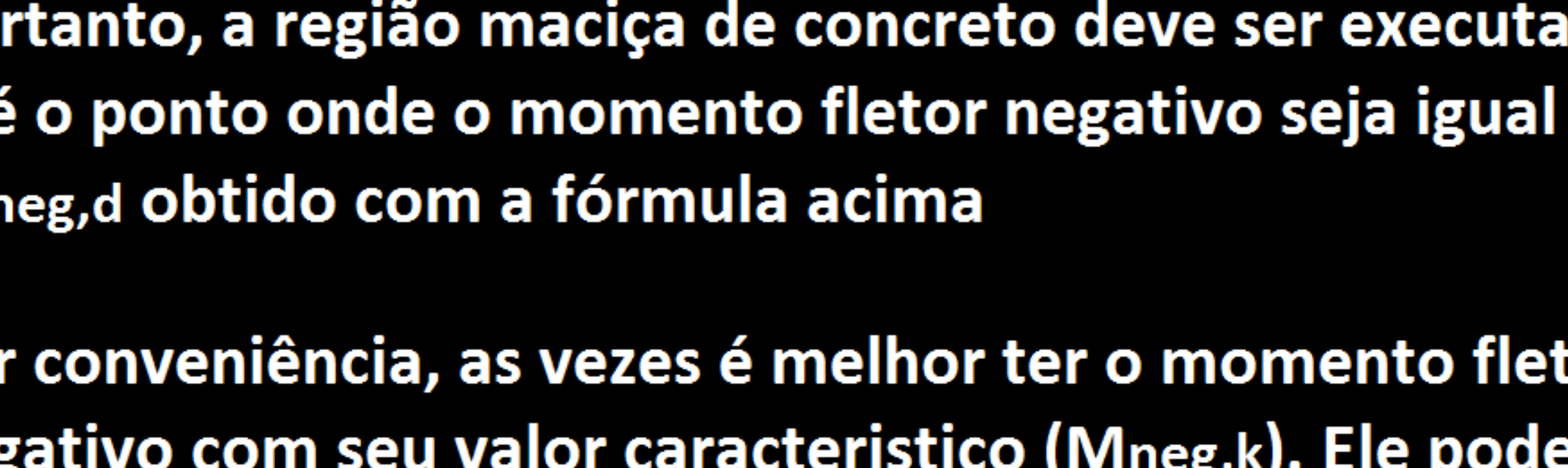
$$M_{neg,d} = 0,85.f_{cd}.(0,8.(0,45.d).b_w).(d - 0,4.(0,45.d))$$

$$M_{neg,d} = 0,306.f_{cd}.b_w.d.(0,82.d)$$

$$M_{neg,d} = 0,251.f_{cd}.b_w.d^2$$

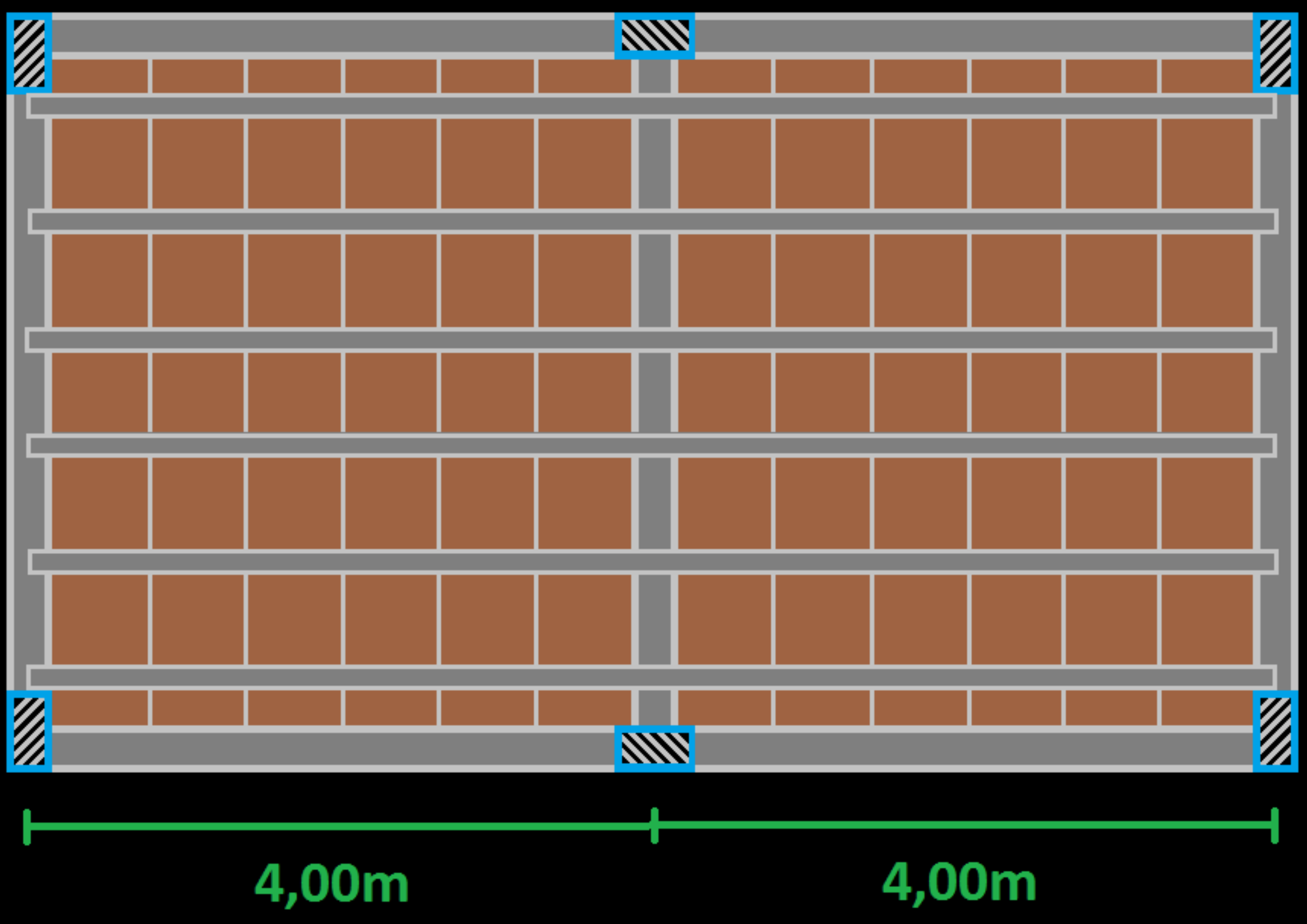
Portanto, a região maciça de concreto deve ser executada até o ponto onde o momento fletor negativo seja igual a $M_{neg,d}$ obtido com a fórmula acima

Por conveniência, as vezes é melhor ter o momento fletor negativo com seu valor caracteristico ($M_{neg,k}$). Ele pode ser obtido dividindo $M_{neg,d}$ pelo coeficiente de minoração



Exercício Resolvido:

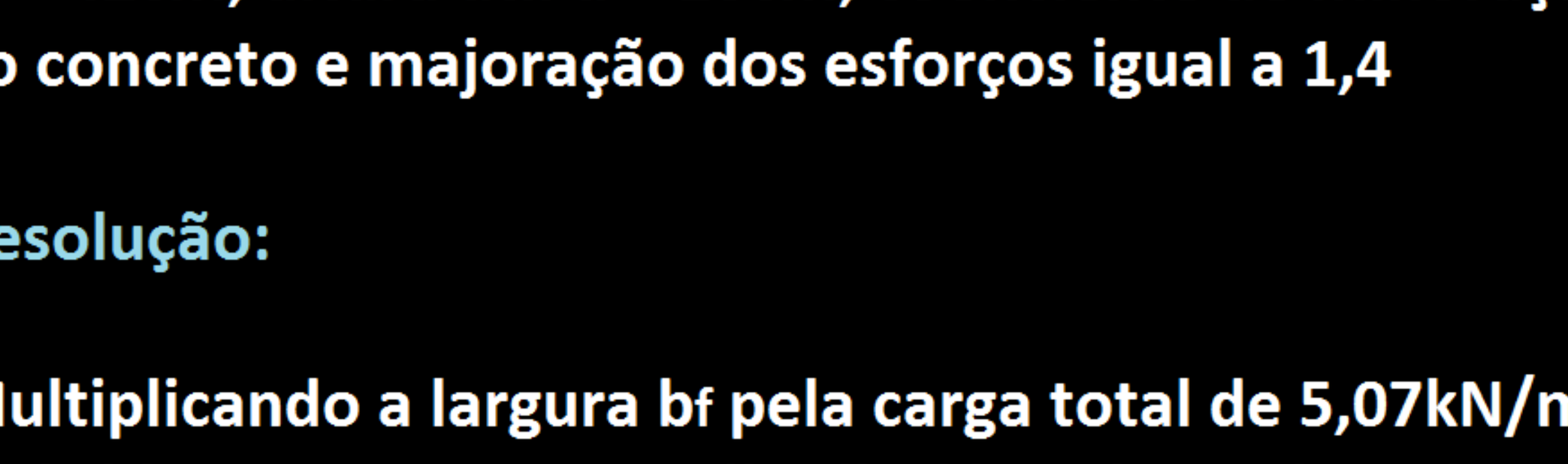
Ex.: Verifique se na continuidade das lajes treliçadas indicadas na figura abaixo é necessária uma região maciça de concreto e, caso afirmativo, qual a largura mínima que ela deve ter. Para isso, considere ambas as lajes submetidas a uma carga total de 5,07kN/m²



Dados adicionais: concreto com fck de 25MPa; b_w = 9cm; b_f = 42cm; altura útil d = 10cm; coeficiente de minoração do concreto e majoração dos esforços igual a 1,4

Resolução:

Multiplicando a largura b_f pela carga total de 5,07kN/m² é obtido o carregamento distribuído sobre a área de influência das vigotas. Logo,



Exercício Resolvido (Continuação):

Supondo um engastamento perfeito na continuidade entre as lajes, o momento fletor negativo máximo será igual a:

$$M_{neg,máx} = \frac{q.L^2}{8} = \frac{2,13.(4^2)}{8} = 4,26kNm = 426kNcm$$

E a altura da linha neutra será:

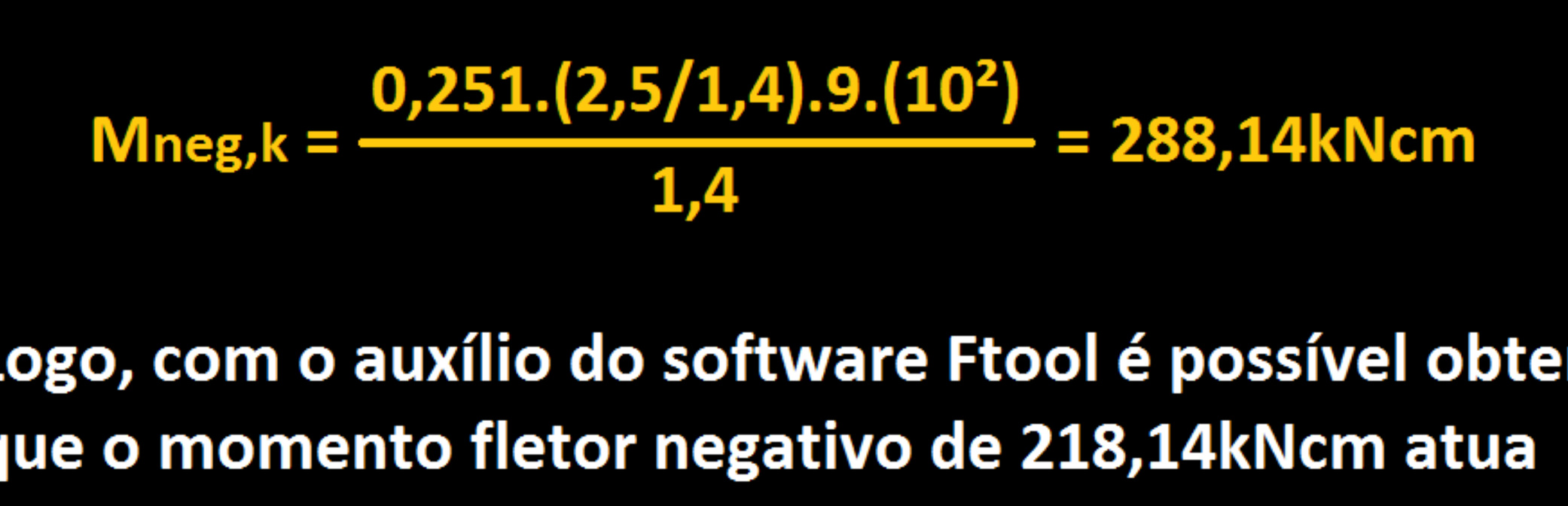
$$x = \frac{0,68.10 \pm \sqrt{(0,68.10)^2 - 1,088.\left(\frac{1,4.426}{9.(2,5/1,4)}\right)}}{0,544}$$

x' = 8,05cm e x'' = 16,95cm (Logo, x = 8,05cm)

Como x/d = 0,81 > 0,45, uma região maciça de concreto será necessária na continuidade. Essa região deverá ser estendida até a seção em que atua o momento $M_{neg,k}$ dado por:

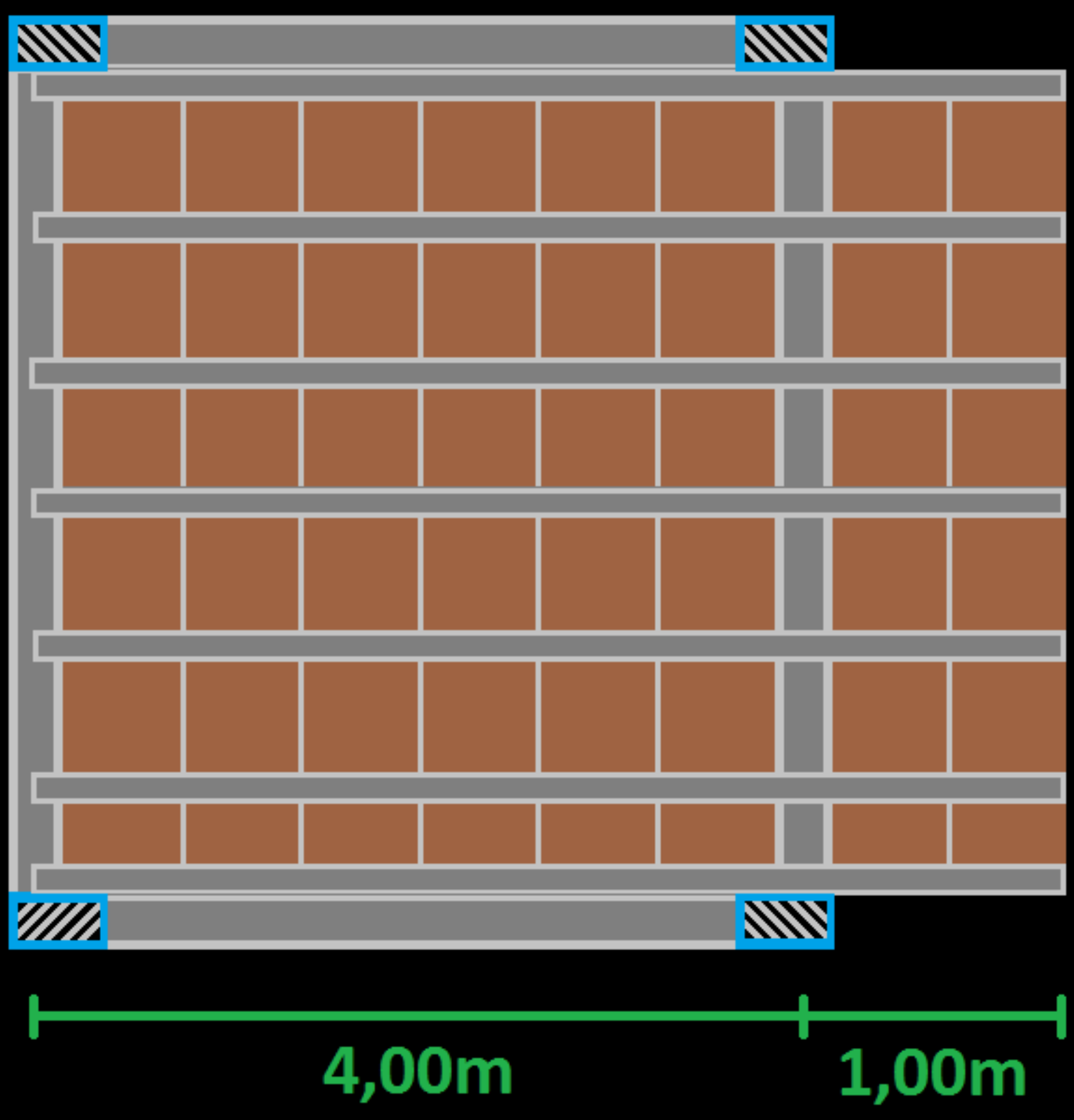
$$M_{neg,k} = \frac{0,251.(2,5/1,4).9.(10^2)}{1,4} = 288,14kNcm$$

Logo, com o auxílio do software Ftool é possível obter que o momento fletor negativo de 218,14kNcm atua nas seções a 27cm do apoio intermediário



Exercício Resolvido:

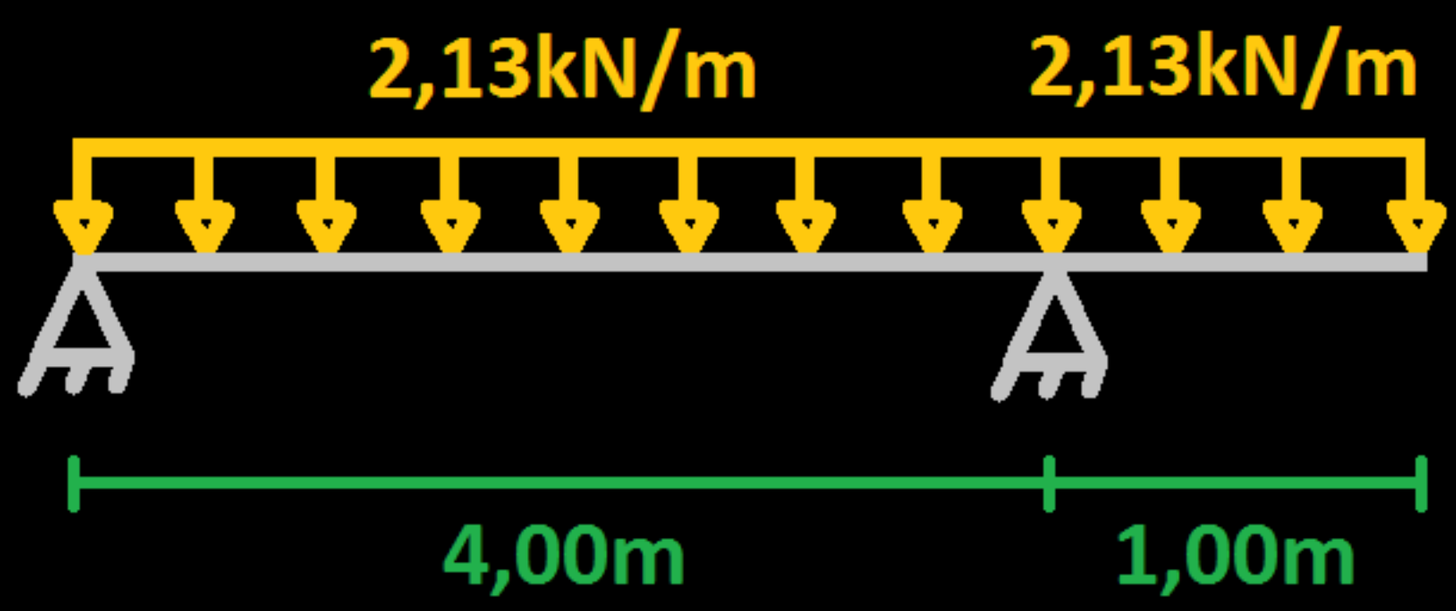
Ex.: Verifique se na continuidade da laje em balanço indicada na figura abaixo é necessária uma região maciça de concreto e, caso afirmativo, qual a largura mínima que ela deve ter. Para isso, considere uma carga total de 5,07kN/m² atuando sobre as lajes



Dados adicionais: concreto com fck de 25MPa; b_w = 9cm; b_f = 42cm; altura útil d = 10cm; coeficiente de minoração do concreto e majoração dos esforços igual a 1,4

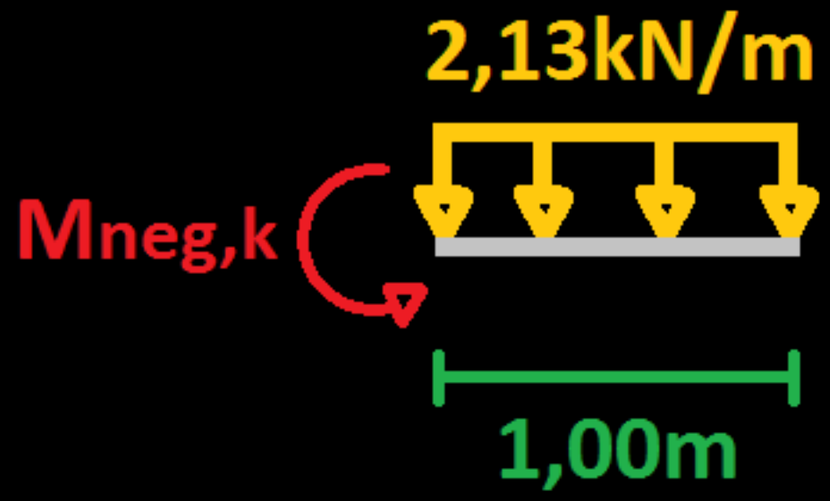
Resolução:

Multiplicando a largura b_f pela carga total de 5,07kN/m² é obtido o carregamento distribuído sobre a área de influência das vigotas. Logo,



Exercício Resolvido (Continuação):

Para encontrar o momento fletor negativo máximo basta aplicar as condições de equilíbrio na seção do engaste:



$$\sum M = 0 : \quad M_{neg,k} - 2,13.1.(1/2) = 0$$

$$M_{neg,k} = 1,065kNm = 106,5kNcm$$

Logo, a altura da linha neutra será igual a:

$$x = \frac{0,68.10 \pm \sqrt{(0,68.10)^2 - 1,088.\left(\frac{1,4.106,5}{9.(2,5/1,4)}\right)}}{0,544}$$

x' = 1,45cm e x'' = 23,55cm (Logo, x = 1,45cm)

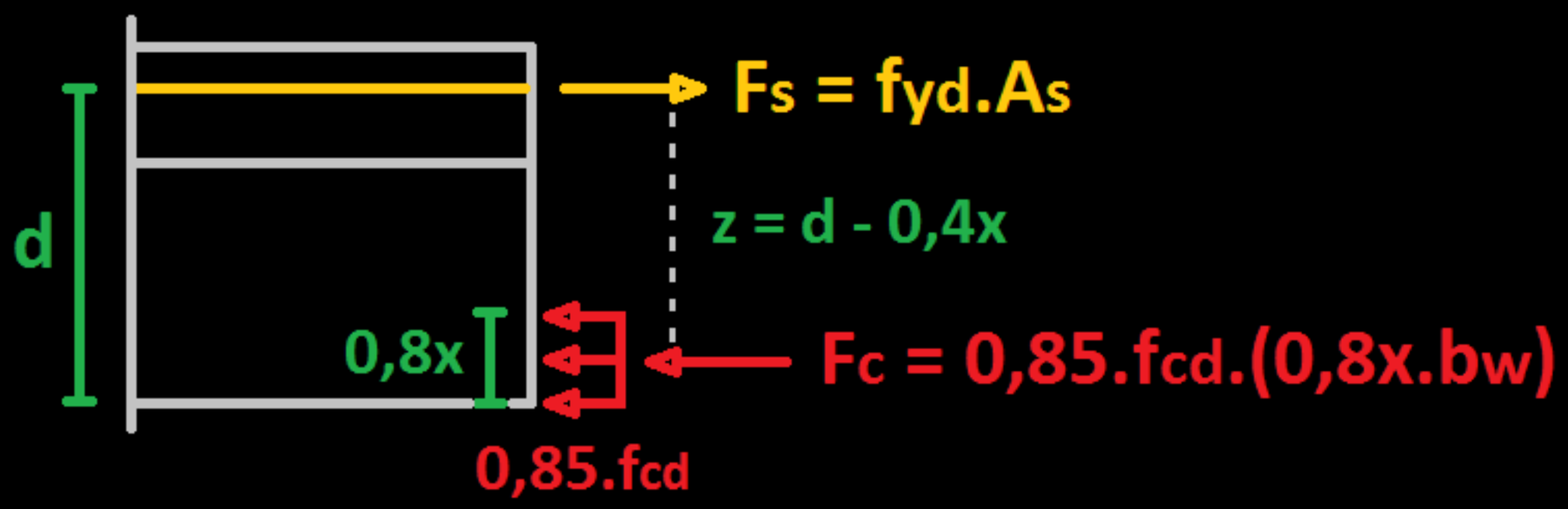
Como x/d = 0,145 < 0,45 a região maciça de concreto na continuidade não será necessária

OBSERVAÇÃO

Na próxima página será deduzida uma fórmula que permite verificar rapidamente se a região maciça de concreto é necessária ou não

Ela fornece a altura útil mínima que a laje deve ter para que a região maciça de concreto possa ser dispensada

ALTURA ÚTIL MÍNIMA PARA DISPENSA DA REGIÃO MACIÇA DE CONCRETO:



Para que exista equilíbrio é necessário que o momento fletor do binário formado por Fs e Fc seja igual ao momento fletor negativo atuando na seção transversal

$$M_{neg,d} = F_c.z = 0{,}85.f_{cd}.(0{,}8x.b_w).(d - 0{,}4x)$$

O maior valor que a altura da linha neutra pode assumir é 0,45d. Logo,

$$M_{neg,d} = 0{,}85.f_{cd}.(0{,}8.(0{,}45.d).b_w).(d - 0{,}4.(0{,}45.d))$$

$$M_{neg,d} = 0{,}306.f_{cd}.b_w.d.(0{,}82.d)$$

$$M_{neg,d} = 0{,}251.f_{cd}.b_w.d^2$$

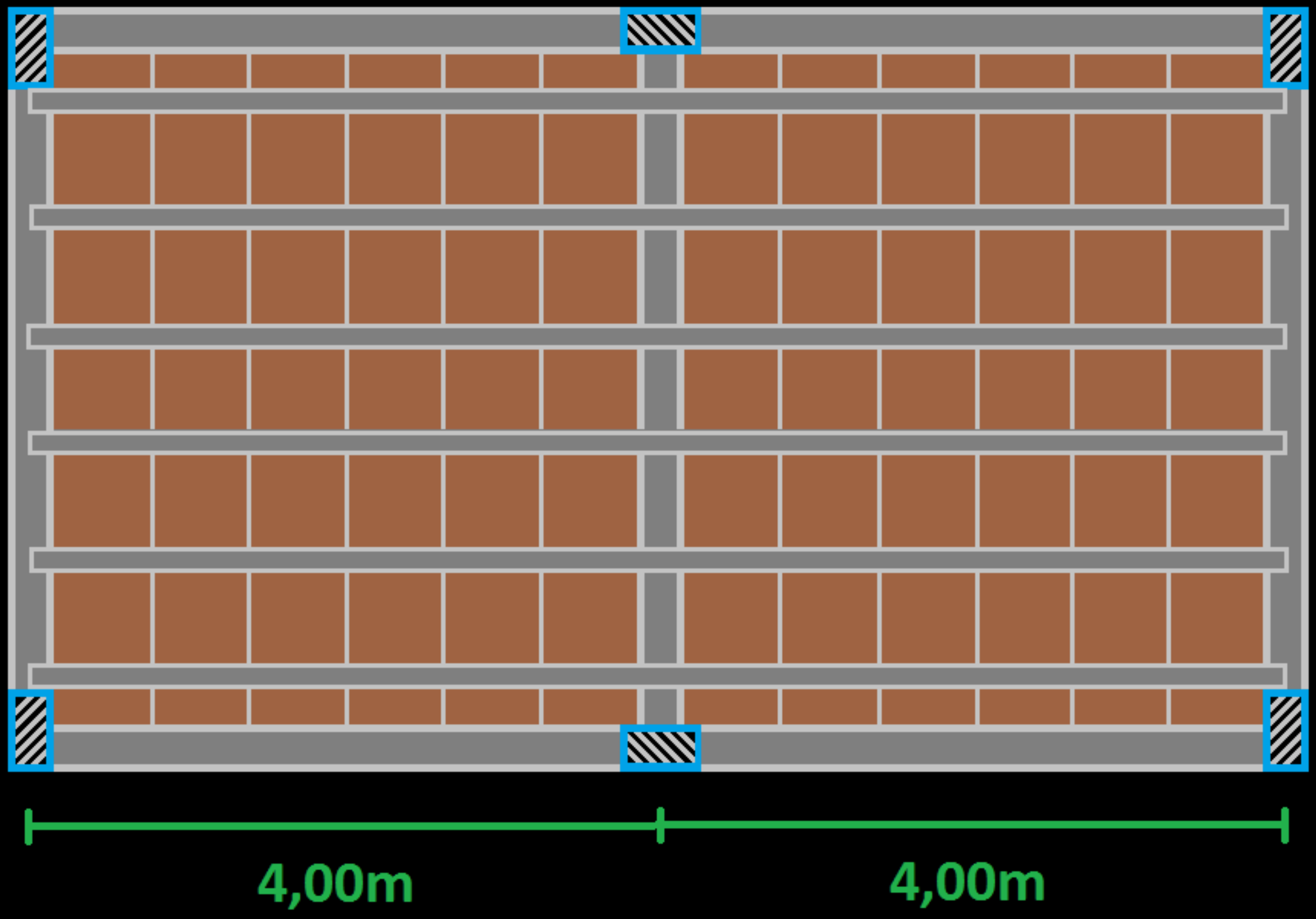
$M_{neg,d}$ é o momento fletor negativo de cálculo, que corresponde ao momento fletor negativo característico multiplicado por um coeficiente de majoração. Portanto,

$$M_{neg,k} = \frac{0{,}251.f_{cd}.b_w.d^2}{\gamma_f}$$

$$d_{mín} = \sqrt{\frac{\gamma_f.M_{neg,k}}{0{,}251.f_{cd}.b_w}} = 2.\sqrt{\frac{\gamma_f.M_{neg,k}}{f_{cd}.b_w}}$$

Exercício Resolvido:

Ex.: Calcule a altura útil mínima para que a região maciça de concreto possa ser dispensada na continuidade das lajes abaixo. Considere uma carga total de 5,07kN/m²



Dados adicionais: concreto com fck de 25MPa; b_f = 42cm; bw = 9cm; coeficientes de minoração e majoração = 1,4

Resolução:

O **carregamento distribuído** sobre as vigotas é obtido multiplicando a carga total em cada m² da laje por b_f

$$q = 5,07.0,42 = 2,13kN/m$$

Logo, o **momento fletor negativo máximo** e a **altura útil mínima** para dispensar a região maciça de concreto são:

$$M_{neg,máx} = \frac{2,13.(4^2)}{8} = 4,26kNm = 426kNcm$$

$$d_{mín} = 2.\sqrt{\frac{1,4.426}{(2,5/1,4).9}} = 12,18cm$$

COMPRIMENTO DA ARMADURA NEGATIVA:

O comprimento das barras de aço da armadura negativa pode ser obtido através da decalagem do diagrama de momento fletor das vigotas (Ver figura abaixo)

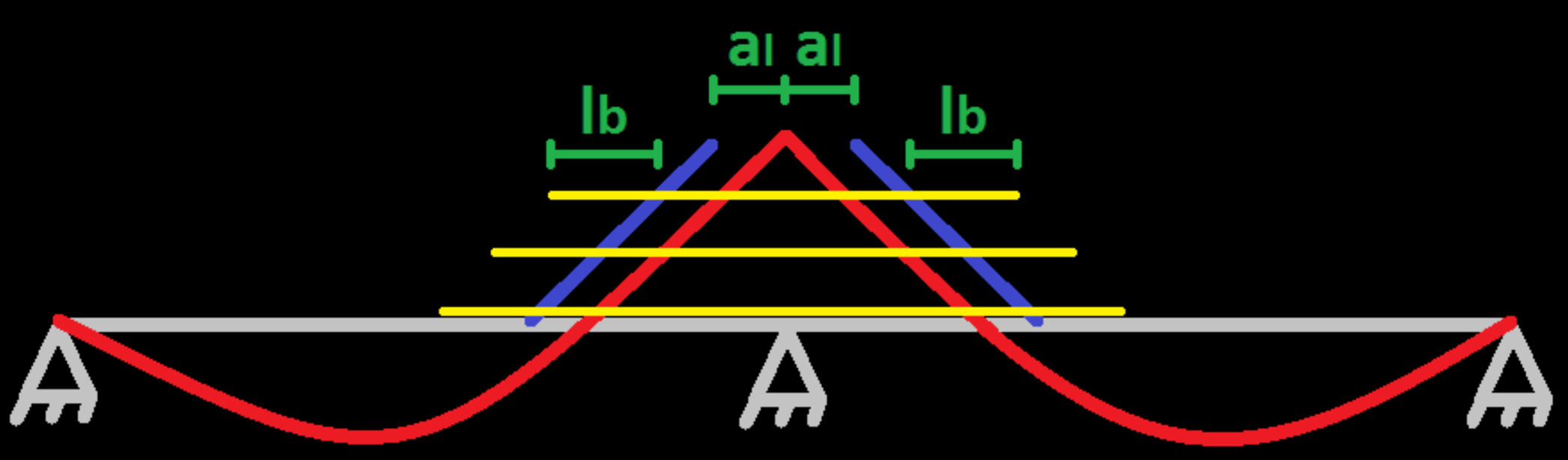


Diagrama de momento fletor real

Diagrama de momento fletor decalado

Barras de aço da armadura negativa

A decalagem nada mais é do que o "deslocamento lateral" do diagrama de momento fletor, e o valor desse deslocamento pode ser obtido com a fórmula presente no item 17.4.2 da NBR 6118:2014

Por simplicidade, é comum adotar um deslocamento entre 0,5d e d

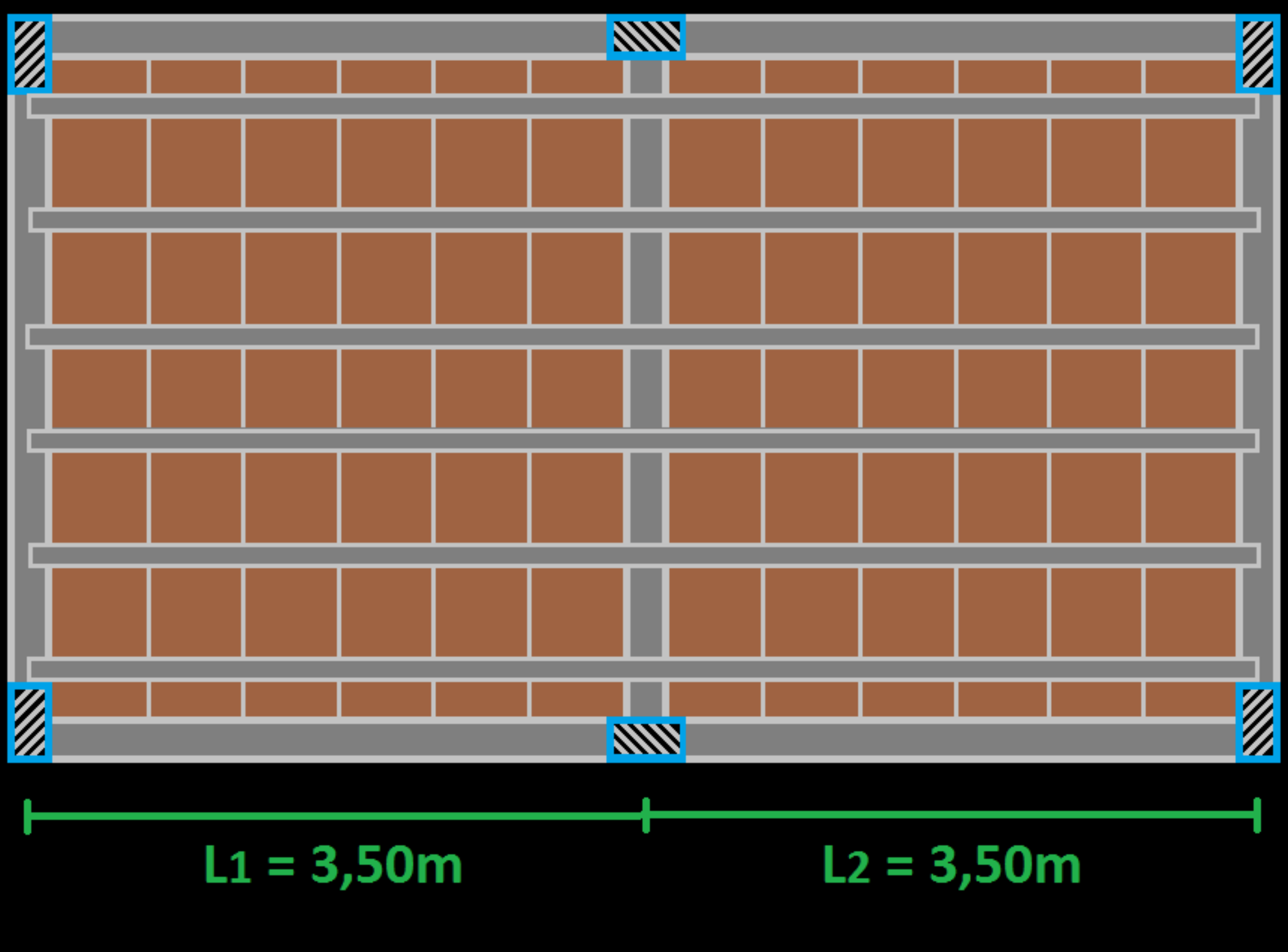
$$0{,}5d \leq a_l \leq d$$

O l_b mostrado no diagrama acima corresponde ao comprimento básico de ancoragem calculado com a fórmula presente no item 9.4.2.4 da NBR 6118:2014 ou retirado de tabelas

OBS.: Na próxima página será resolvido um exercício no qual a armadura negativa será calculada e detalhada

Exercício Resolvido:

Ex.: Calcule a armadura negativa na continuidade entre as 2 lajes adjacentes mostradas na figura abaixo. Para isso, considere a laje da esquerda submetida apenas a uma carga permanente de 3,57kN/m² e a laje da direita submetida a mesma carga permanente + uma carga variável de 1,5kN/m² (Utilizar aço CA-50)



Dados adicionais: concreto com fck de 25MPa; b_w = 9cm; b_f = 42cm; altura útil d = 10cm; coeficiente de minoração do concreto e majoração dos esforços igual a 1,4

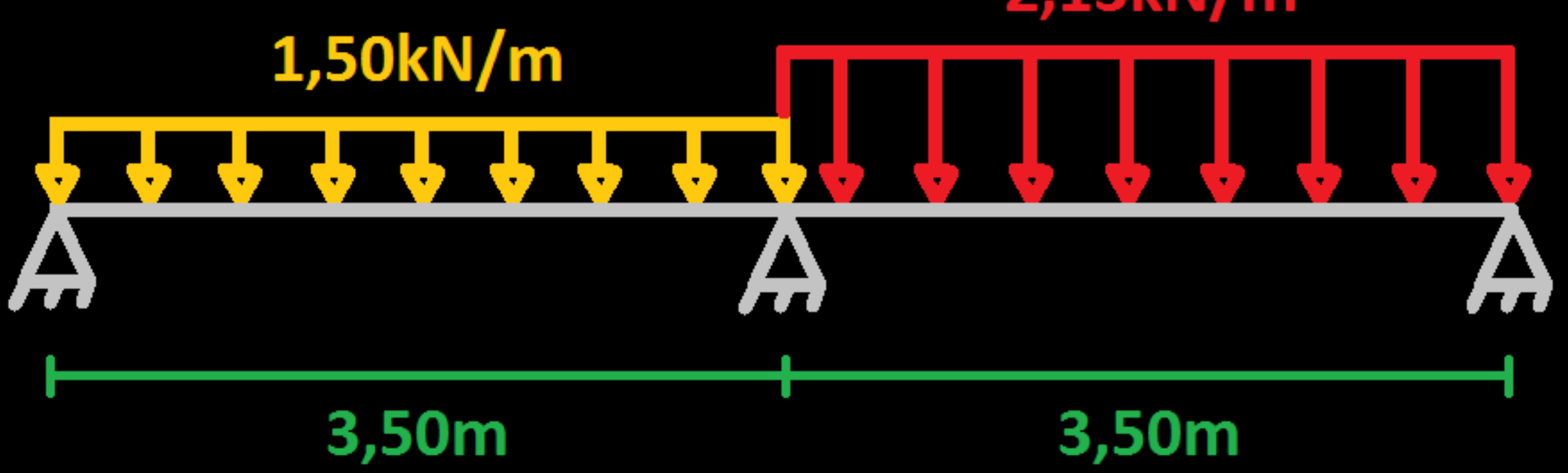
Resolução:

Para encontrar o **carregamento distribuído** sobre as vigotas, basta multiplicar a carga atuando em cada m² das lajes pela largura da área de influência dessas vigotas. Logo,

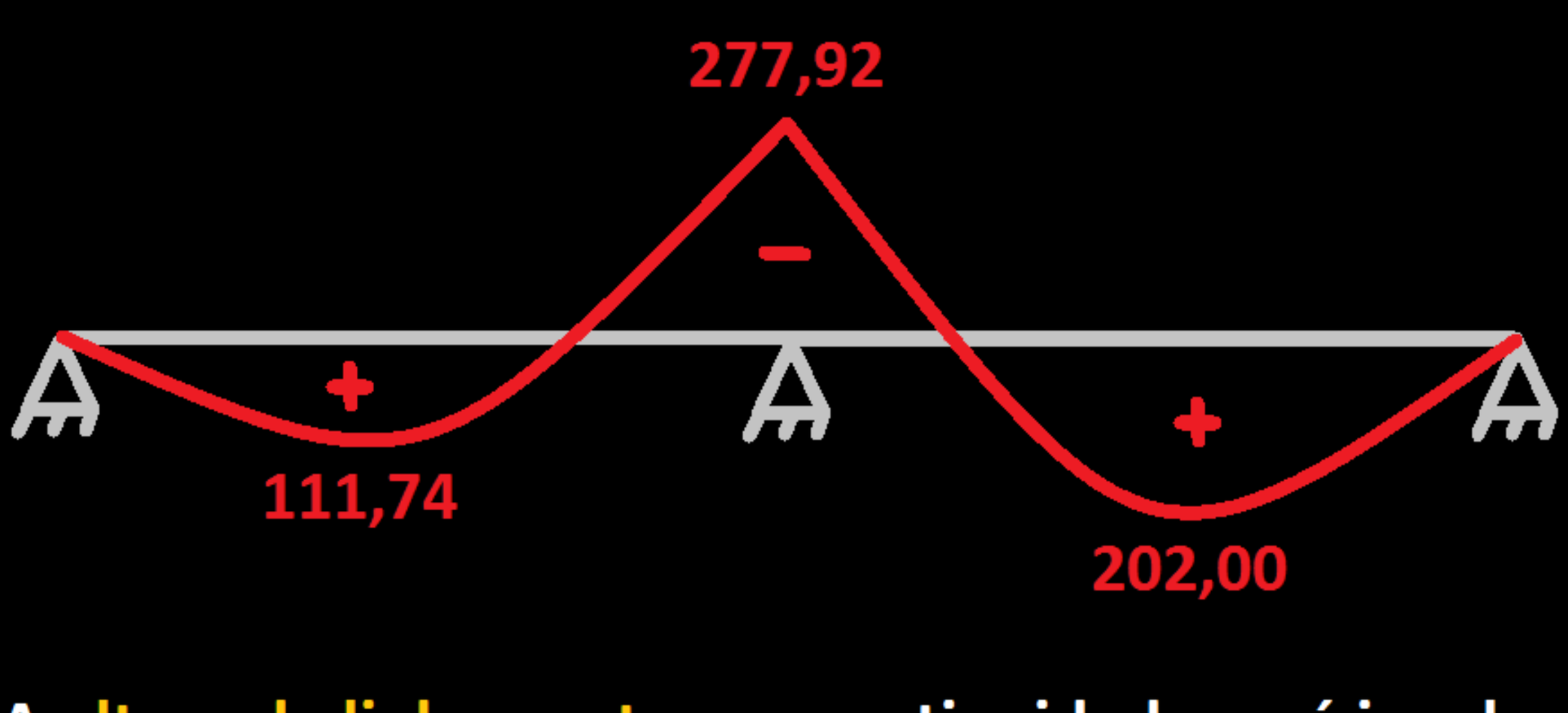
$q_1 = 3,57 . 0,42 = 1,50kN/m$ $q_2 = 5,07 . 0,42 = 2,13kN/m$

Exercício Resolvido (Continuação):

Esquema estático das vigotas:



Com o auxílio do software Ftool obtemos o diagrama de momento fletor em kNcm:



A altura da linha neutra na continuidade será igual a:

$$x = \frac{0,68.10 \pm \sqrt{(0,68.10)^2 - 1,088.\left(\frac{1,4.277,92}{9.(2,5/1,4)}\right)}}{0,544}$$

x' = 4,30cm e x'' = 20,70cm (Logo, x = 4,30cm)

Como x/d = 0,43 < 0,45 a região maciça de concreto na continuidade não é necessária

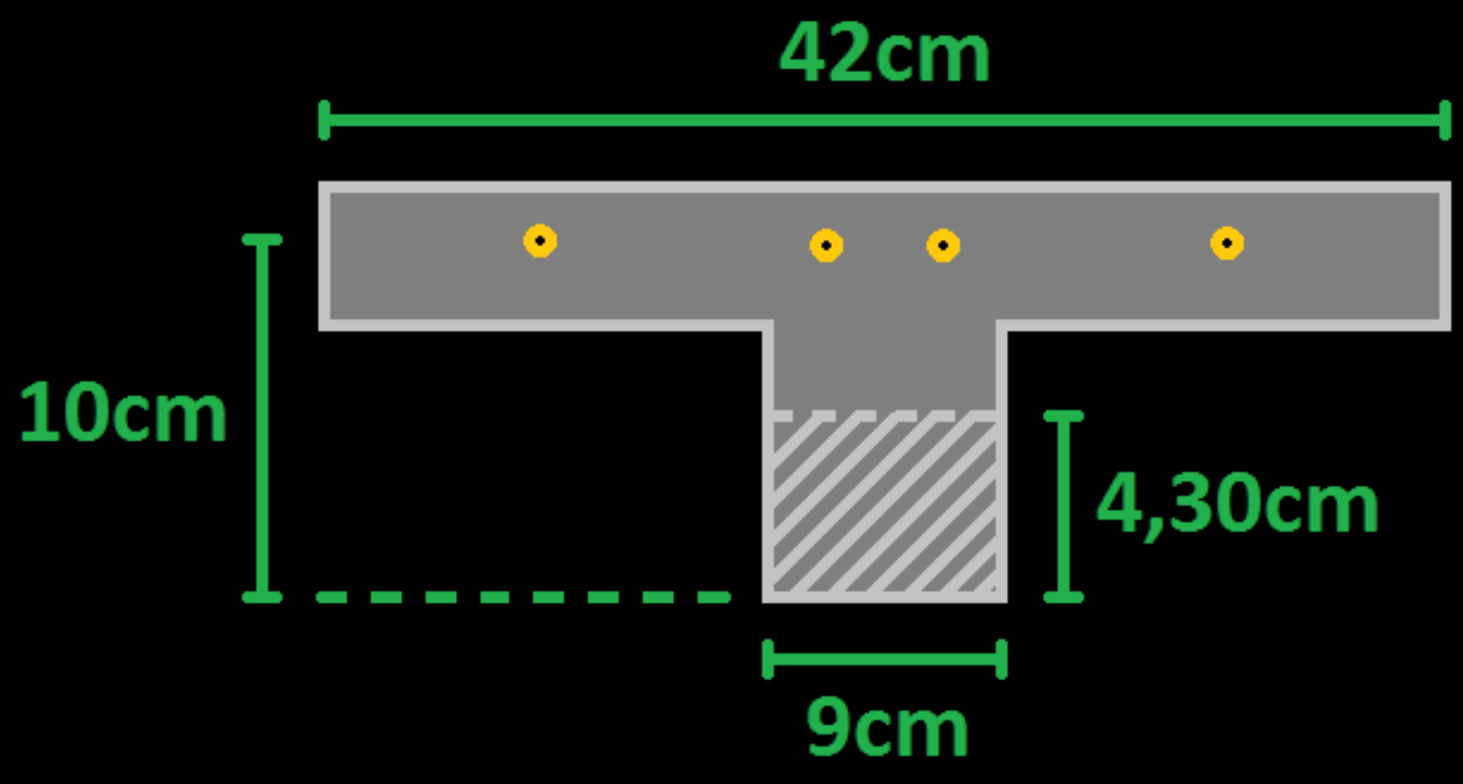
Exercício Resolvido (Continuação):

A área de aço da armadura negativa e a quantidade de barras são iguais a:

$$As = \frac{1,4.277,92}{(50/1,15).(10 - 0,4.4,30)} = 1,08cm^2$$

$$\text{Nº barras} = \frac{1,08}{\pi.(0,63^2).0,25} \cong 4 \text{ barras de } 6,3mm$$

Logo, na continuidade de cada vigota devem ser posicionadas 4 barras de aço com bitola de 6,3mm



Segundo Leonhardt e Mönning (1978) é recomendado que 40 a 80% da armadura negativa esteja posicionada nas abas da viga T para melhor controle da fissuração. Portanto, 2 barras serão posicionadas acima da nervura e 1 em cada aba da viga

Para obter o comprimento das barras de aço, o diagrama de momento fletor das vigotas será deslocado 0,5d para cada lado. Logo,

$$a_l = 0,5.10 = 5cm$$

Exercício Resolvido (Continuação):

O próximo passo é calcular o comprimento básico de ancoragem (l_b) das barras de aço. Para isso será utilizada a fórmula presente no item 9.4.2.4 da NBR 6118:2014

$$l_b = \frac{\emptyset}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}} \geq 25\emptyset \; ; \quad f_{bd} = n_1.n_2.n_3.\frac{0{,}21.(f_{ck})^{2/3}}{\gamma_c}$$

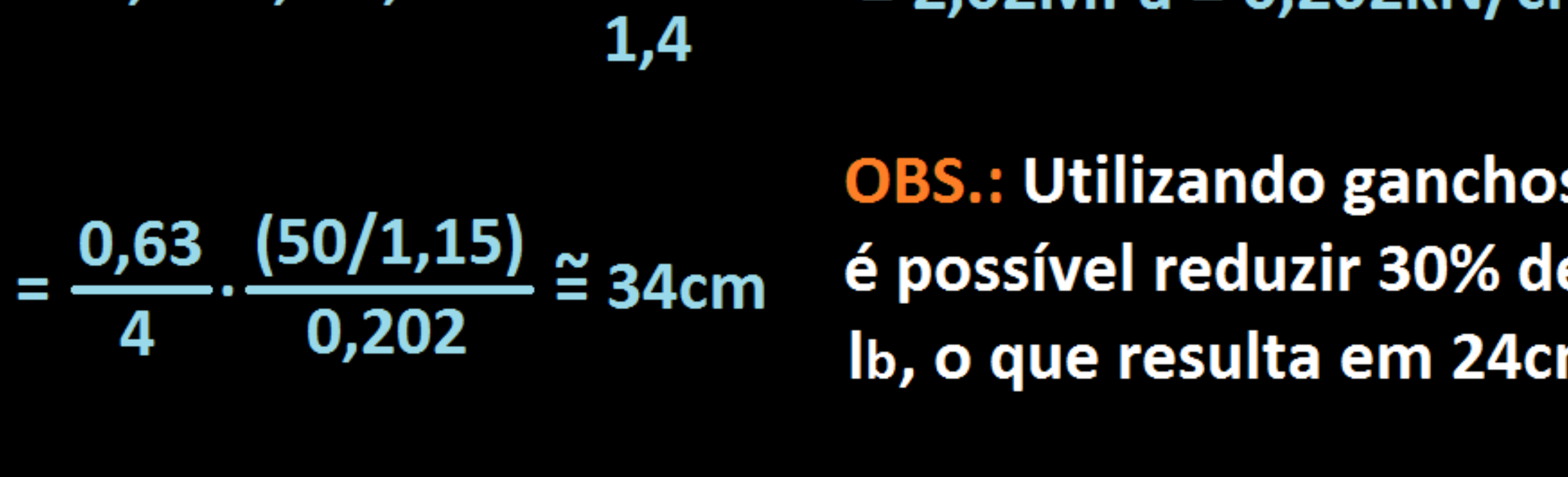
A fórmula para o cálculo de f_{bd} mostrada acima é válida apenas para concretos com até 50MPa. Além disso, $n_1 = 2{,}25$ para barras nervuradas, $n_2 = 0{,}7$ para região de má aderência e $n_3 = 1{,}0$ para $\emptyset < 32mm$. Logo,

$$f_{bd} = 2{,}25.0{,}7.1{,}0.\frac{0{,}21.(25)^{2/3}}{1{,}4} = 2{,}02MPa = 0{,}202kN/cm^2$$

$$l_b = \frac{0{,}63}{4} \cdot \frac{(50/1{,}15)}{0{,}202} \cong 34cm$$

OBS.: Utilizando ganchos é possível reduzir 30% de l_b, o que resulta em 24cm

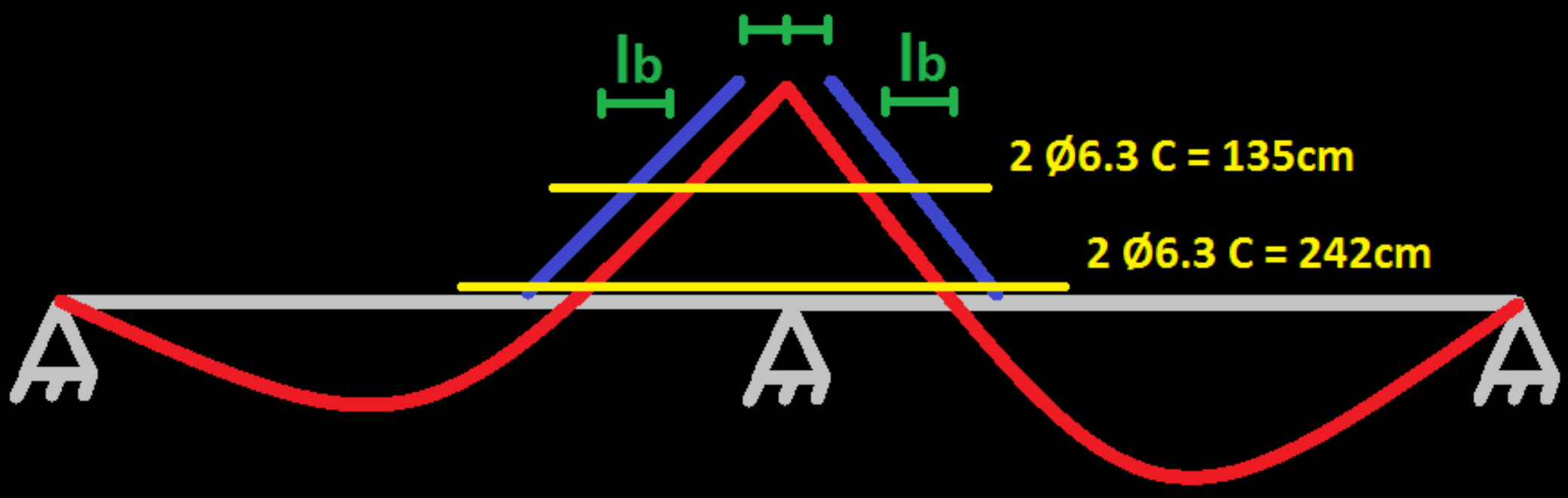
Portanto, com o auxílio do Ftool, obtemos o comprimento das 4 barras de aço da armadura negativa na continuidade:



Esse comprimento é igual a distância entre os pontos do diagrama de momento fletor interceptados pelas barras mais duas vezes $a_l + l_b$

Exercício Resolvido (Continuação):

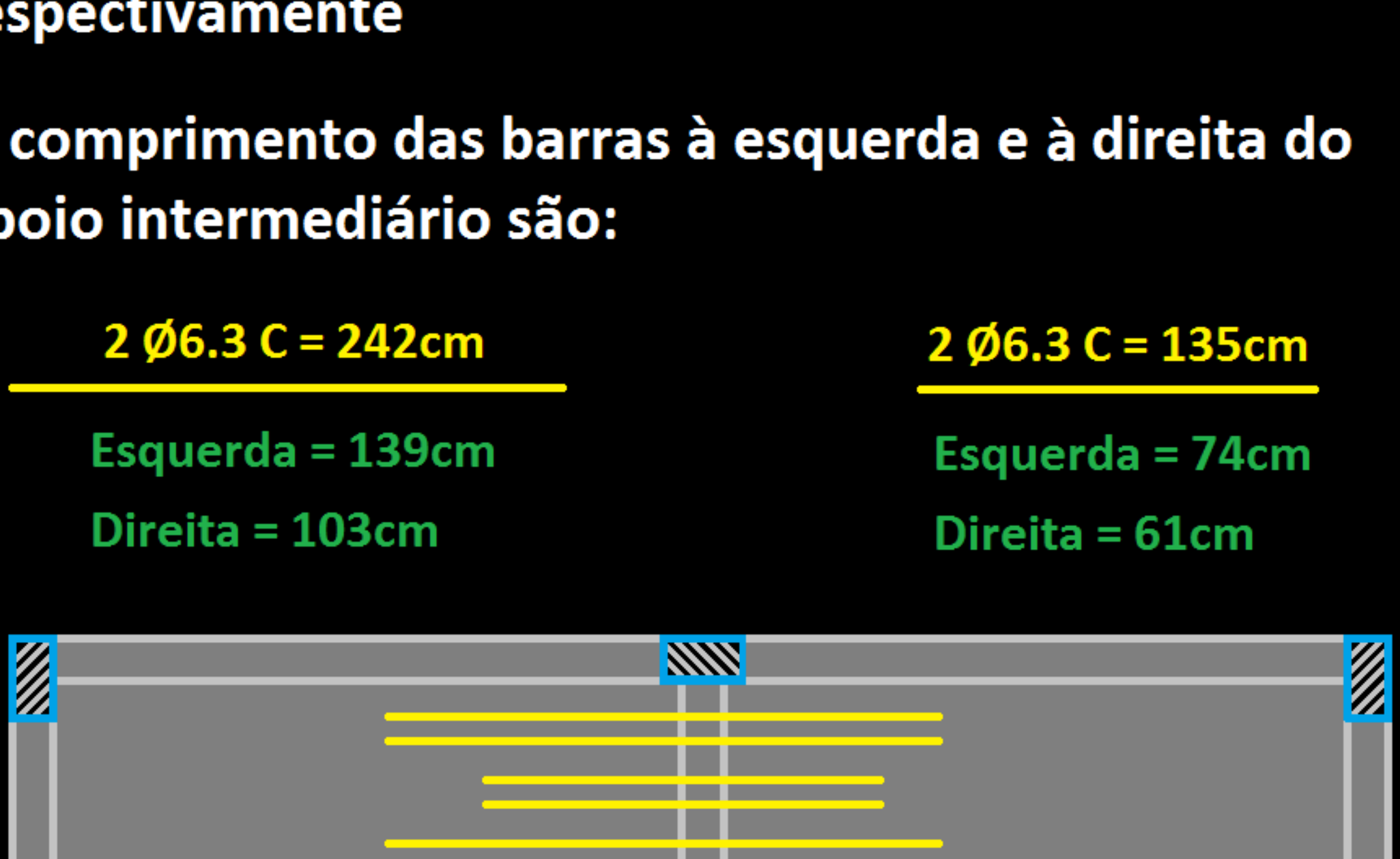
Para não dificultar a execução, as barras terão apenas dois comprimentos: 242cm e 135cm



As barras com 242cm e 135cm de comprimento serão posicionadas acima das nervuras e nas abas da seção T, respectivamente

O comprimento das barras à esquerda e à direita do apoio intermediário são:

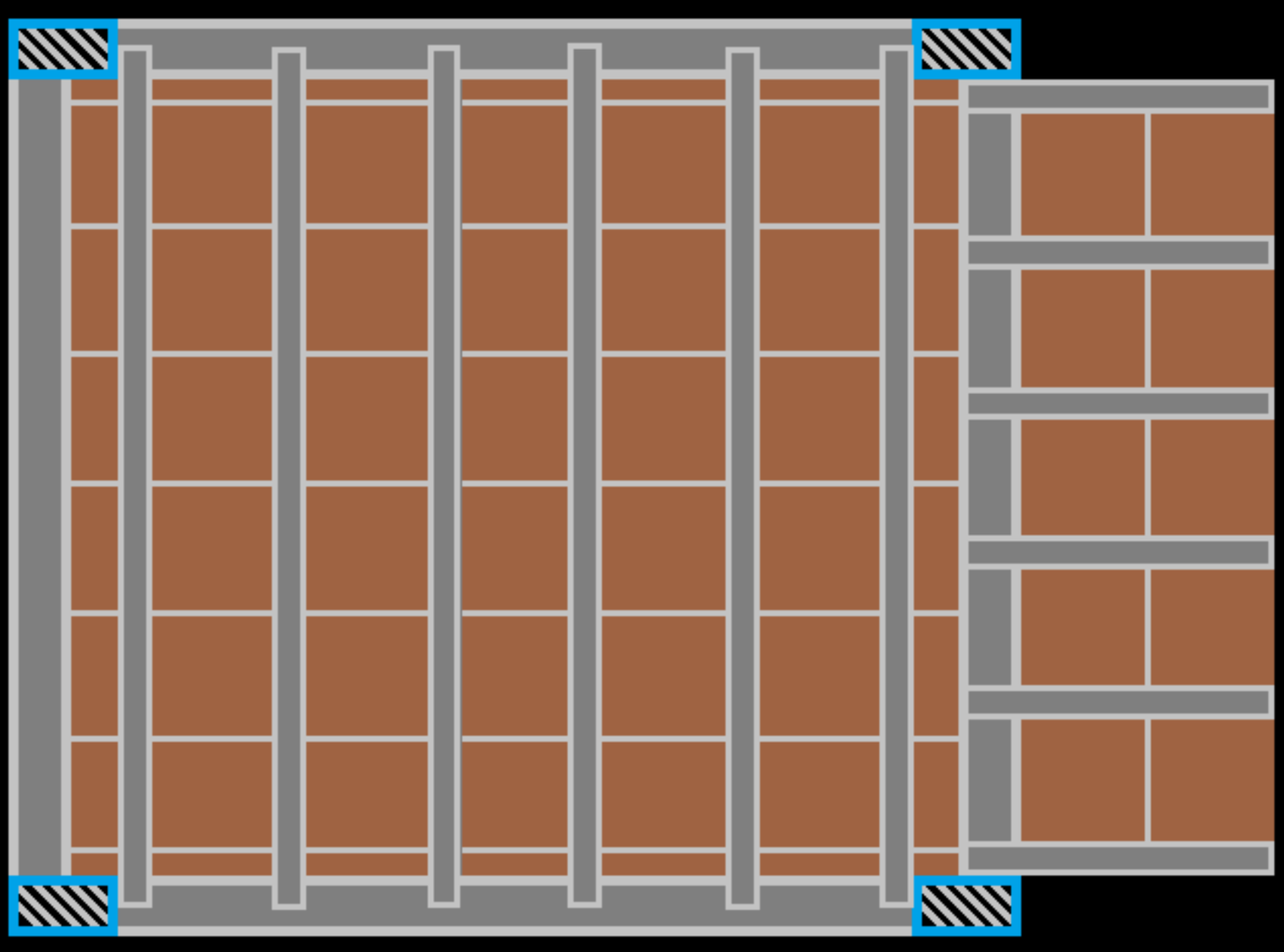
2 Ø6.3 C = 242cm	2 Ø6.3 C = 135cm
Esquerda = 139cm	Esquerda = 74cm
Direita = 103cm	Direita = 61cm



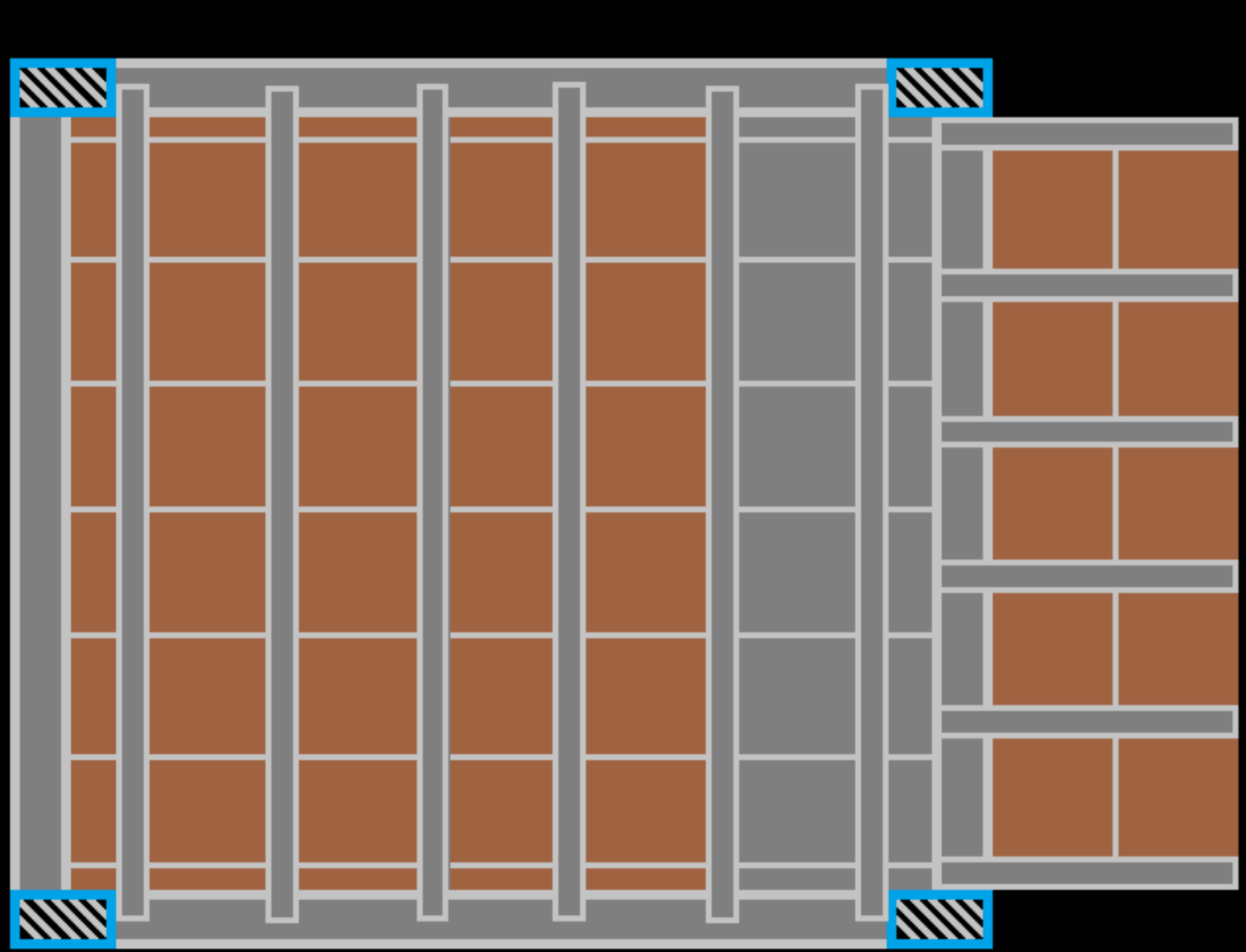
OBS.: Como existe a possibilidade das cargas inverterem é recomendado adotar o mesmo comprimento para as barras à esquerda e à direita do apoio intermediário (maior deles)

ENGASTAMENTO ENTRE LAJES TRELIÇADAS ADJACENTES COM VIGOTAS PERPENDICULARES ENTRE SI:

Quando duas lajes treliçadas adjacentes possuem vigotas perpendiculares entre si, o engastamento entre elas pode ser feito através de uma região maciça de concreto, conforme ilustra as figuras abaixo:

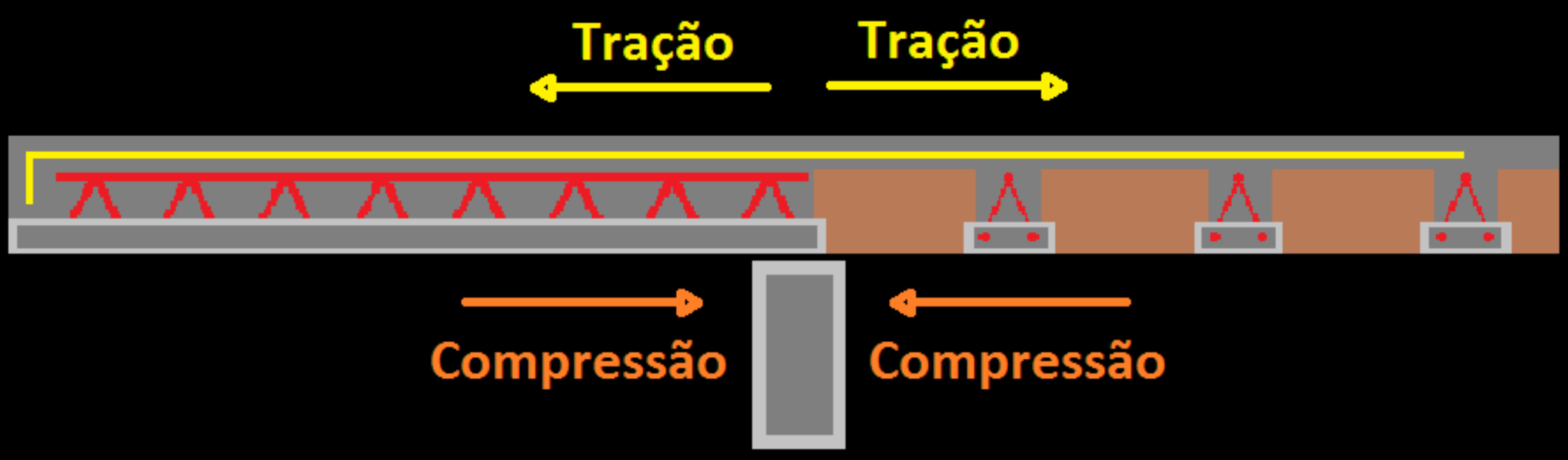


a) Laje treliçada em balanço com vigotas perpendiculares à laje treliçada adjacente

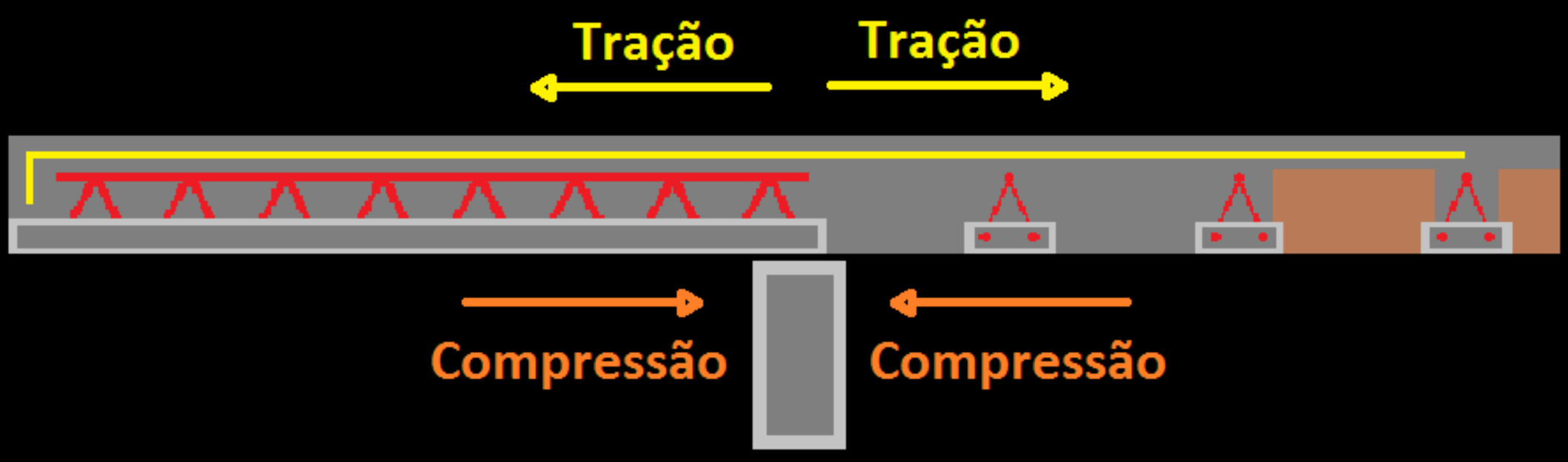


b) Ligação entre laje treliçada em balanço e laje treliçada adjacente com vigotas perpendiculares. Note a região maciça de concreto (Situação ideal)

Como bem sabemos, os blocos de enchimento possuem baixa resistência aos esforços de compressão já que, em geral, são feitos de EPS ou lajota cerâmica. Por esse motivo, é necessária uma região maciça de concreto para resistir aos esforços de compressão gerados pelo momento fletor negativo da laje em balanço



c) Corte de uma laje treliçada em balanço com vigotas perpendiculares à outra laje adjacente (Sem maciço)

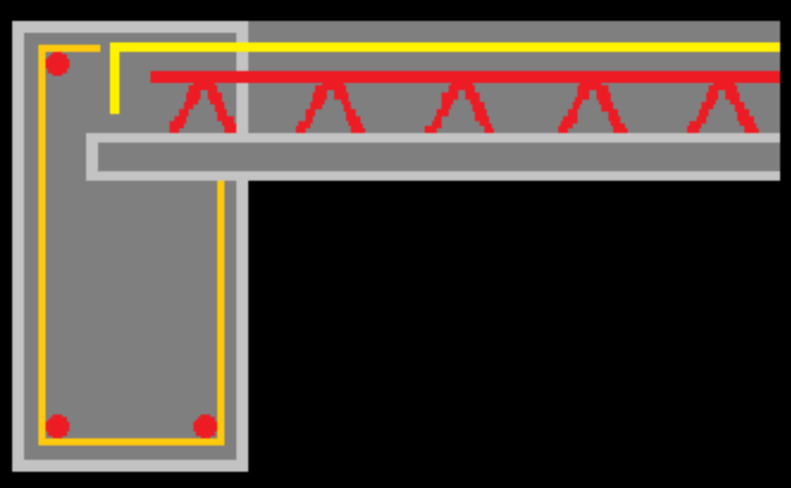


d) Corte de uma laje treliçada em balanço com vigotas perpendiculares à outra laje adjacente (Com maciço)

O momento fletor negativo provoca esforços de tração no banzo superior da laje, que devem ser resistidos pela armadura negativa posicionada nessa região e esforços de compressão no banzo inferior, que devem ser resistidos pelo concreto da região maciça

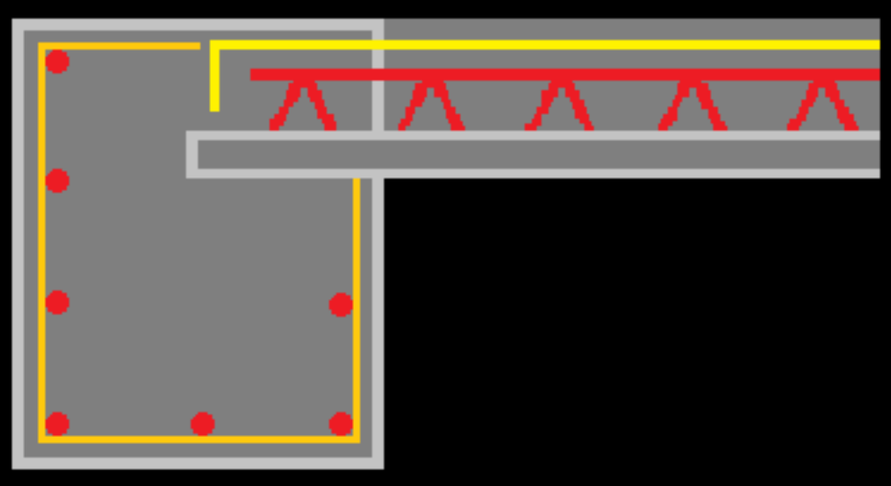
ENGASTAMENTO DE LAJES TRELIÇADAS EM VIGAS (SEM CONTINUIDADE COM LAJES ADJACENTES):

Quando uma laje treliçada não apresenta continuidade com outra laje adjacente e se liga diretamente em um viga através da armadura negativa, ocorre a transmissão de esforços de torção para essa viga que, em geral, não será capaz de resistir e sofrerá uma leve rotação



a) Laje "engastada" em viga (Devido a baixa rigidez a torção essa ligação se comporta como uma rótula)

Se a viga for dimensionada para resisitir aos esforços de torção, a ligação entre laje e viga se comportará como um engaste semi-rígido, sendo que a rigidez da ligação irá depender das dimensões da laje e viga, quantidade de aço, fck do concreto e armadura negativa da laje

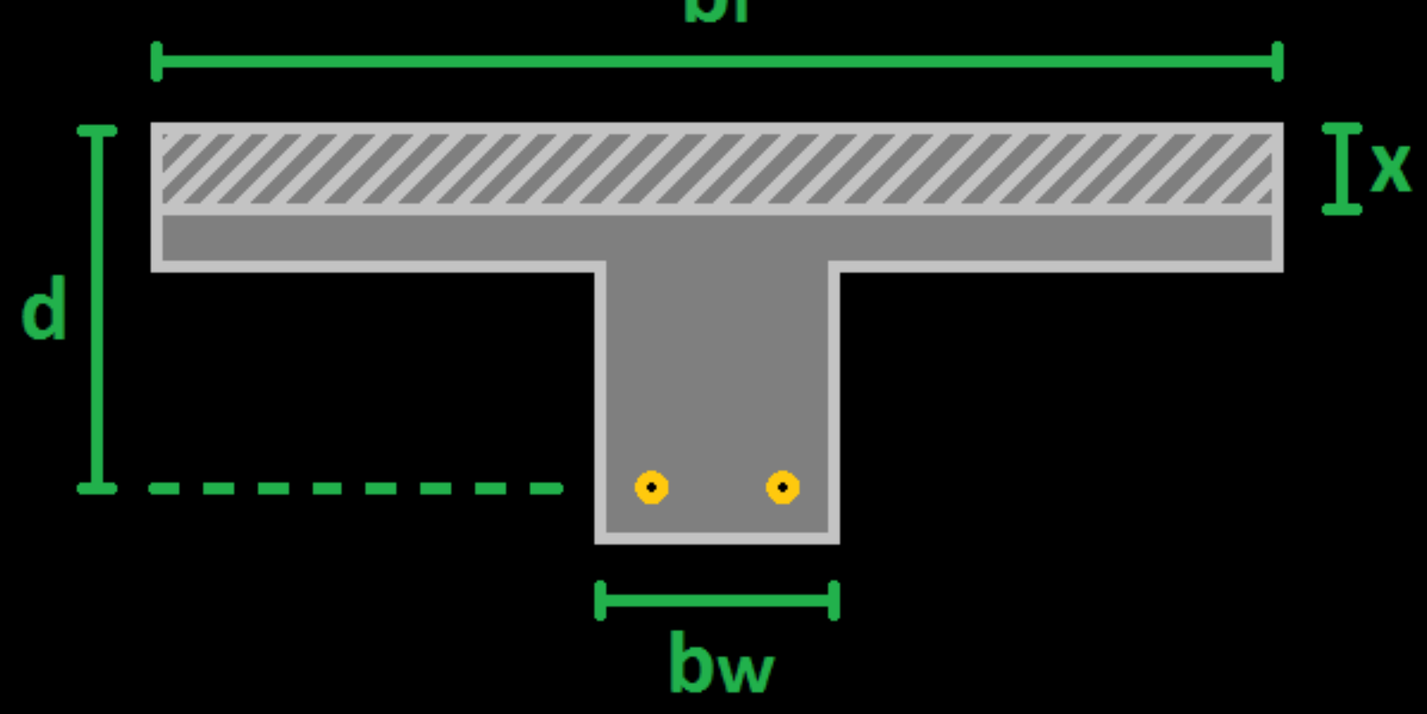


b) Laje engastada em viga (Devido a grande rigidez a torção essa ligação se comporta como um engaste semi-rígido)

OBS.: Devido a dificuldade em determinar a rigidez do engaste nessa situação, é comum considerar a ligação como uma rótula, ou seja, como um apoio simples

ANEXO (CÁLCULO DA ARMADURA POSITIVA)

Para finalizar esse livro com chave de ouro irei te ensinar como calcular a armadura positiva em lajes treliçadas



Observe nas figuras acima que o momento fletor positivo provoca esforços de tração no banzo inferior e esforços de compressão no banzo superior da laje

A força resultante de tração é resistida pelas barras de aço do banzo inferior da treliça (As1) e pelas barras de aço da armadura complementar (As2)

Se por acaso As2 resultar em um valor menor ou igual a zero isso significa que a armadura complementar não é necessária

Perceba que para existir equilíbrio é necessário que a força resultante de tração seja igual a força resultante de compressão (Fs = Fc). Além disso, o momento fletor do binário formado por Fs e Fc deve ser igual ao momento fletor positivo atuando na seção

ANEXO (CÁLCULO DA ARMADURA POSITIVA)

Aplicando as condições de equilíbrio mencionadas na página anterior, temos que:

$$M_{pos,d} = F_c.z = 0{,}85.f_{cd}.(0{,}8x.b_f).(d - 0{,}4x)$$

$$-0{,}272.f_{cd}.b_f.x^2 + 0{,}68.f_{cd}.b_f.d.x - M_{pos,d} = 0$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara na equação do 2º grau acima, obtemos que a altura da linha neutra será igual a:

$$x = \frac{0{,}68.d \pm \sqrt{(0{,}68.d)^2 - 1{,}088.\left(\frac{M_{pos,d}}{b_f.f_{cd}}\right)}}{0{,}544}$$

Como F_c deve ser igual a F_s, temos que:

$$M_{pos,d} = F_s.z = (f_{yd1}.A_{s1} + f_{yd2}.A_{s2}).z$$

$$M_{pos,d} = f_{yd1}.A_{s1}.z + f_{yd2}.A_{s2}.z$$

$$A_{s2} = \frac{M_{pos,d} - f_{yd1}.A_{s1}.z}{f_{yd2}.z}$$

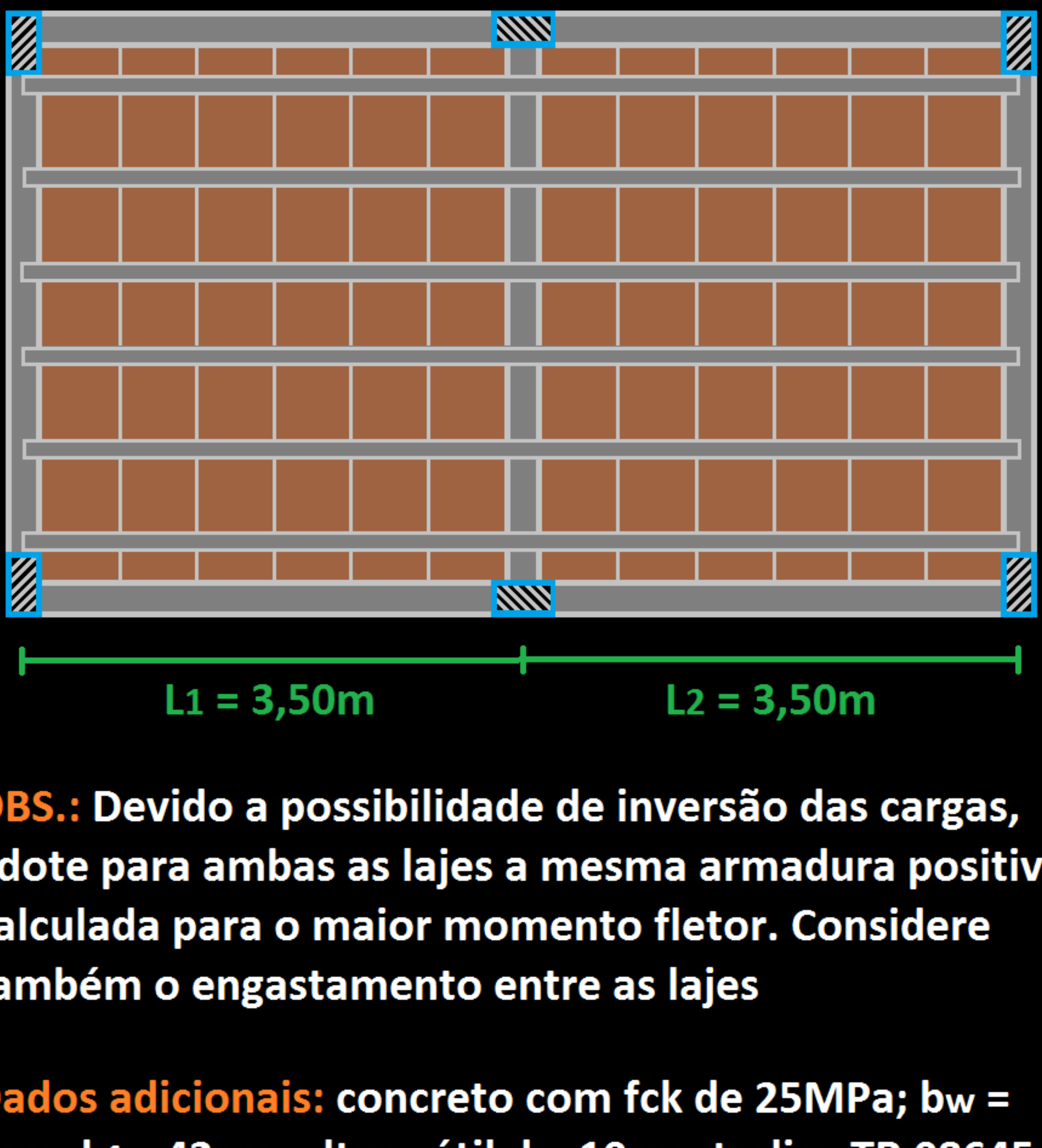
$$A_{s2} = \frac{(M_{pos,d}/z) - f_{yd1}.A_{s1}}{f_{yd2}}$$

Como $F_c = M_{pos,d}/z$, a área de aço da armadura complementar será igual a:

$$A_{s2} = \frac{F_c - f_{yd1}.A_{s1}}{f_{yd2}}; \quad F_c = 0{,}68.f_{cd}.b_f.x$$

ANEXO (CÁLCULO DA ARMADURA POSITIVA)

Ex.: Calcule a armadura positiva das lajes adjacentes mostradas na figura abaixo. Para isso, considere a laje da esquerda submetida apenas a carga permanente de 3,57kN/m² e a laje da direita submetida a mesma carga permanente + uma carga variável de 1,5kN/m²



OBS.: Devido a possibilidade de inversão das cargas, adote para ambas as lajes a mesma armadura positiva calculada para o maior momento fletor. Considere também o engastamento entre as lajes

Dados adicionais: concreto com fck de 25MPa; b_w = 9cm; b_f = 42cm; altura útil d = 10cm; treliça TR 08645 com aço CA-60; armadura complementar com aço CA-50; coeficiente de minoração do concreto e majoração dos esforços igual a 1,4; coeficiente de minoração do aço igual a 1,15

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO NAS PRÓXIMAS PÁGINAS

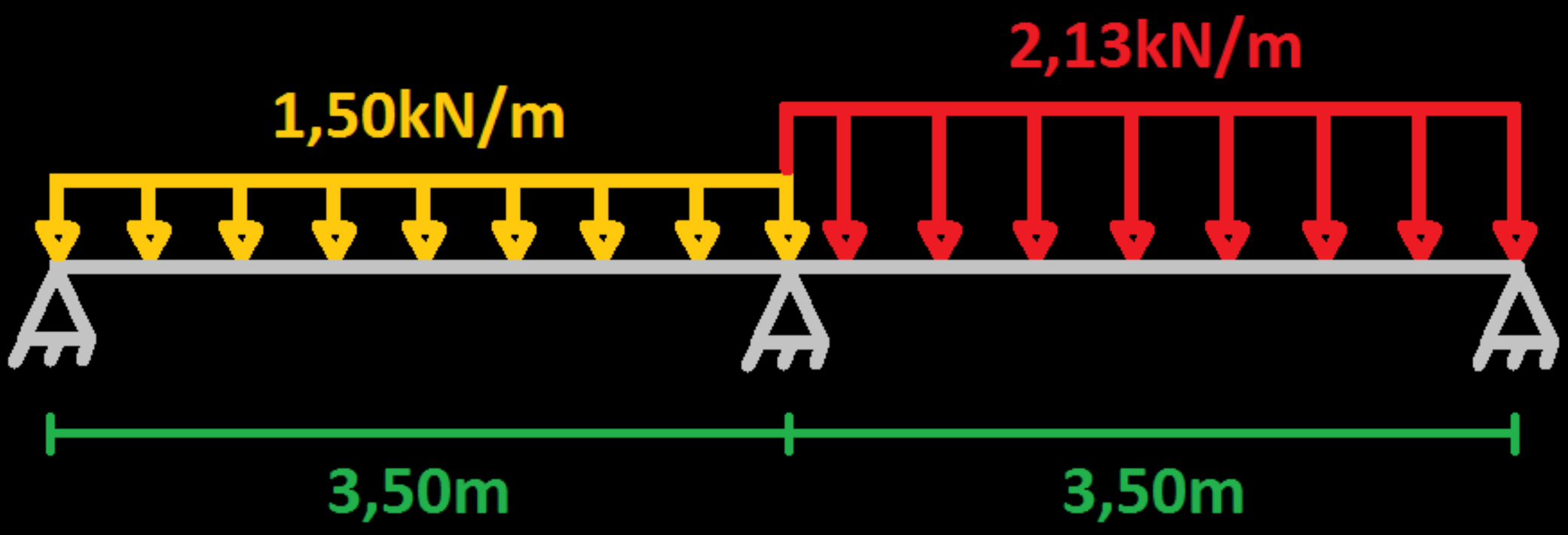
ANEXO (CÁLCULO DA ARMADURA POSITIVA)

Resolução:

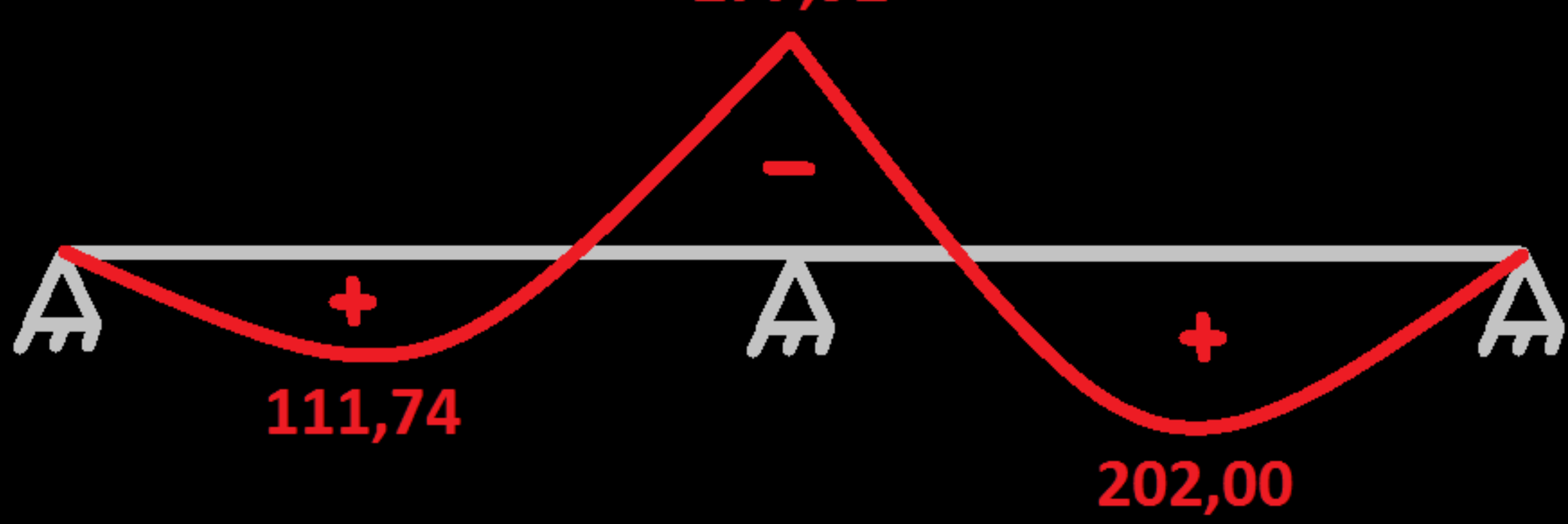
Para encontrar o carregamento distribuído sobre as vigotas basta multiplicar a carga atuando em cada m^2 das lajes pela largura da área de influência. Logo,

$q_1 = 3,57.0,42 = 1,50kN/m$ $q_2 = 5,07.0,42 = 2,13kN/m$

Esquema estático das vigotas:



Com o auxílio do software Ftool obtemos o diagrama de momento fletor em kNcm:



A altura da linha neutra na seção onde atua o momento fletor positivo de 202kNcm é igual a:

$$x = \frac{0,68.10 \pm \sqrt{(0,68.10)^2 - 1,088.\left(\frac{1,4.202}{42.(2,5/1,4)}\right)}}{0,544}$$

x' = 0,57cm e x'' = 24,43cm (Logo, x = 0,57cm)

ANEXO (CÁLCULO DA ARMADURA POSITIVA)

Resolução (Continuação):

Como $x/d = 0,057 < 0,45$ podemos garantir **boas condições de ductilidade** para a seção. Além disso, podemos garantir também que a tensão nas armaduras será **igual a tensão de escoamento do aço (Domínio 2)**

$$f_{yd1} = \frac{60}{1,15} = 52,17 kN/cm^2 \qquad f_{yd2} = \frac{50}{1,15} = 43,48 kN/cm^2$$

f_{yd1} = Tensão de escoamento do aço da treliça (valor de cálculo)

f_{yd2} = Tensão de escoamento do aço da armadura complementar (valor de cálculo)

A **força resultante de compressão (F_c)** será igual a:

$$F_c = 0,68.f_{cd}.b_f.x = 0,68.(2,5/1,4).42.0,57 = 29,07kN$$

A treliça **TR 08645** possui **duas barras de aço** com **bitola de 5mm** em seu **banzo inferior**, o que corresponde a uma área de aço A_{s1} igual a:

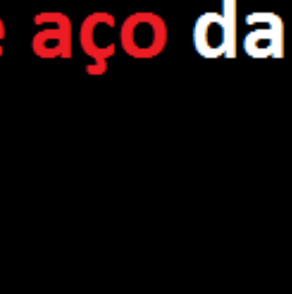
$$A_{s1} = 2.[\pi.(0,5^2).0,25] = 0,3927cm^2$$

Logo, temos o necessário para calcular a **área de aço** da **armadura complementar (A_{s2})**:

$$A_{s2} = \frac{F_c - f_{yd1}.A_{s1}}{f_{yd2}} = \frac{29,07 - 52,17.0,3927}{43,48} = 0,1974cm^2$$

Se adotarmos a **bitola de 5mm**, a **quantidade de barras de aço da armadura complementar** em **cada vigota** será:

$$\text{Nº de barras} = \frac{0,1974}{\pi.(0,5^2).0,25} \cong 1 \text{ barra}$$

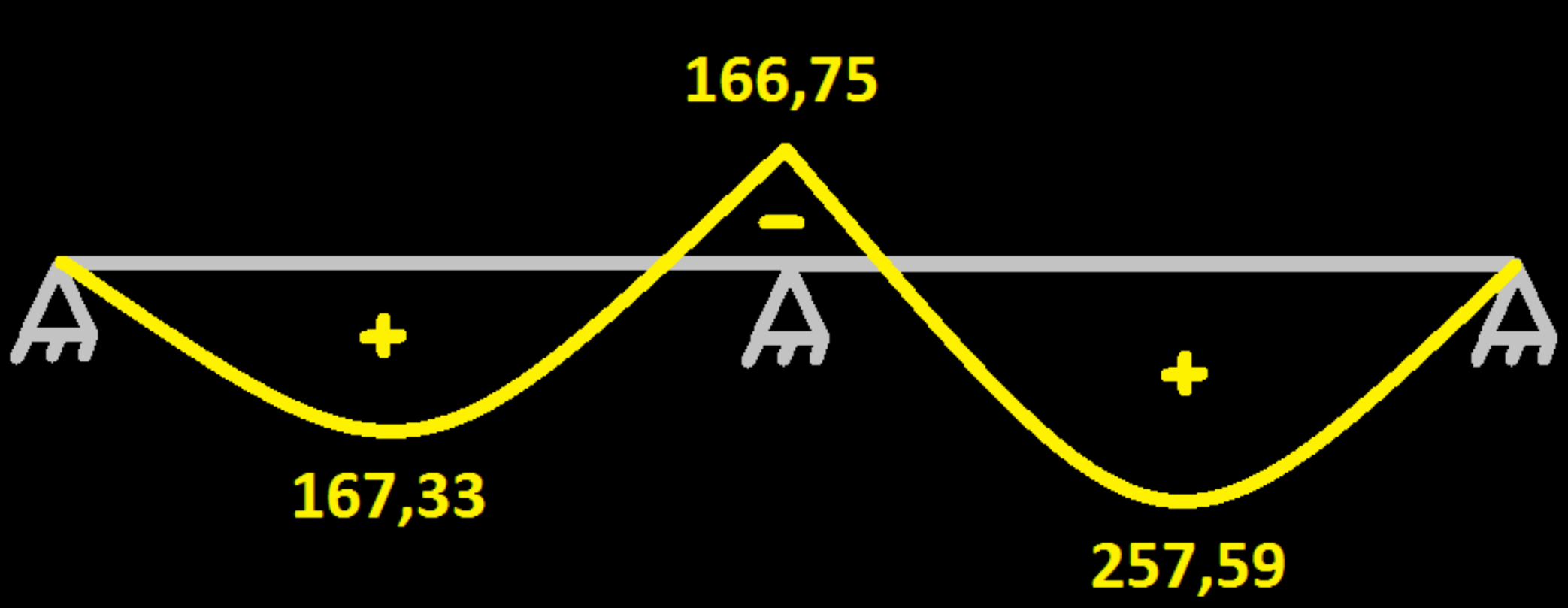


ANEXO (CÁLCULO DA ARMADURA POSITIVA)

Resolução (Continuação):

OBS.: Para considerar os efeitos de uma possível fissuração dos apoios vamos fazer uma redistribuição dos momentos e calcular a armadura complementar para essa situação

Considerando uma redução de 40% do momento fletor negativo (ΔM = 111,17kNcm) e um aumento de ΔM/2 no momento fletor positivo, temos que:



A nova altura da linha neutra e a força Fc serão:

$$x = \frac{0,68.10 \pm \sqrt{(0,68.10)^2 - 1,088.\left(\frac{1,4.257,59}{42.(2,5/1,4)}\right)}}{0,544}$$

x' = 0,73cm e x'' = 24,27cm (Logo, x = 0,73cm)

Fc = 0,68.fcd.bf.x = 0,68.(2,5/1,4).42.0,73 = 37,23kN

E a área de aço da armadura complementar será:

$$As2 = \frac{Fc - fyd1.As1}{fyd2} = \frac{37,23 - 52,17.0,3927}{43,48} = 0,3851cm^2$$

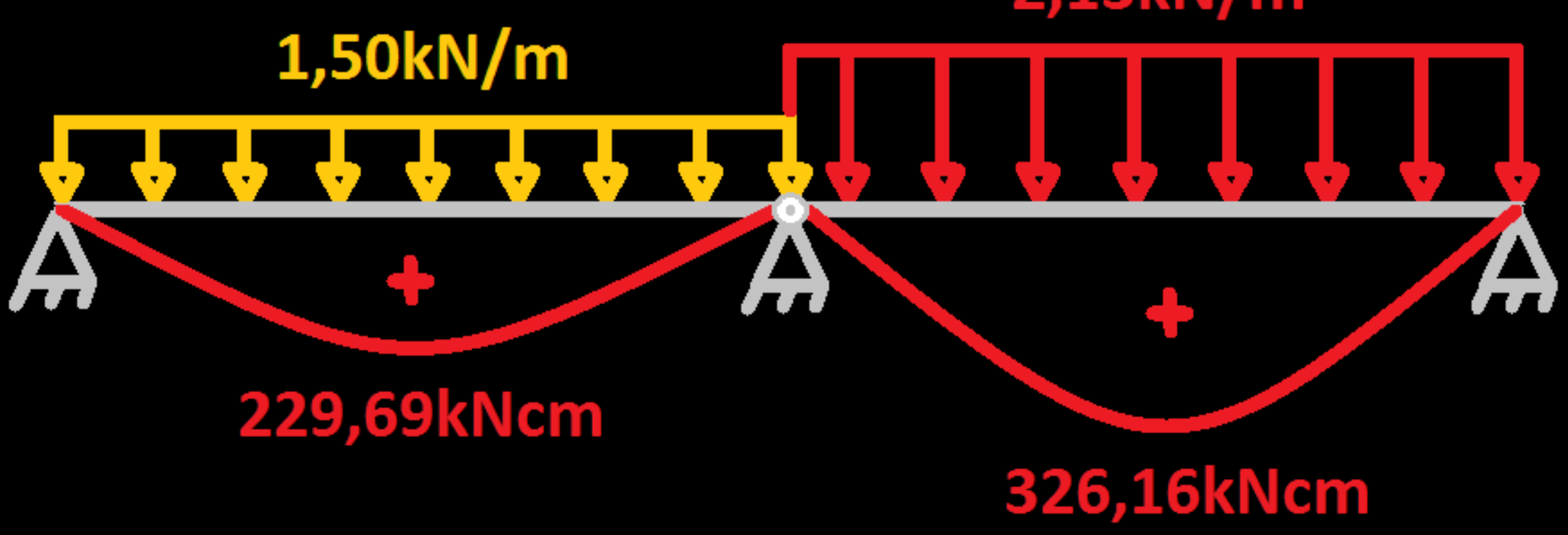
Isso corresponde aproximadamente a 2 barras de 5mm

ANEXO (CÁLCULO DA ARMADURA POSITIVA)

Ex.: Calcule a armadura positiva das lajes do exercício anterior considerando as extremidades simplesmente apoiadas, ou seja, sem continuidade sobre o apoio intermediário

Resolução:

Sem a continuidade sobre o apoio intermediário o diagrama de momento fletor das lajes passa a ser:



Onde,

$$M_{pos,L1} = \frac{q1.L1^2}{8} = 229,69kNcm$$

$$M_{pos,L2} = \frac{q2.L2^2}{8} = 326,16kNcm$$

Como existe a possibilidade dos carregamentos se inverterem, ou seja, de $q_2 = 2,13kN/m$ também atuar na laje da esquerda, a armadura positiva de ambas as lajes será calculada para o maior momento fletor

$$x = \frac{0,68.10 \pm \sqrt{(0,68.10)^2 - 1,088.\left(\frac{1,4.326,16}{42.(2,5/1,4)}\right)}}{0,544}$$

$x' = 0,93cm$ e $x'' = 24,07cm$ (Logo, $x = 0,93cm$)

ANEXO (CÁLCULO DA ARMADURA POSITIVA)

Resolução (Continuação):

Como $x/d = 0,093 < 0,45$ podemos garantir boas condições de ductilidade para a seção. Além disso, podemos garantir também que a tensão nas armaduras será igual a tensão de escoamento do aço (Domínio 2)

$$f_{yd1} = \frac{60}{1,15} = 52,17 kN/cm^2 \qquad f_{yd2} = \frac{50}{1,15} = 43,48 kN/cm^2$$

A força resultante de compressão (F_c) será igual a:

$$F_c = 0,68.f_{cd}.b_f.x = 0,68.(2,5/1,4).42.0,93 = 47,43kN$$

A treliça TR 08645 possui duas barras de aço com bitola de 5mm em seu banzo inferior, o que corresponde a uma área de aço A_{s1} igual a:

$$A_{s1} = 2.[\pi.(0,5^2).0,25] = 0,3927cm^2$$

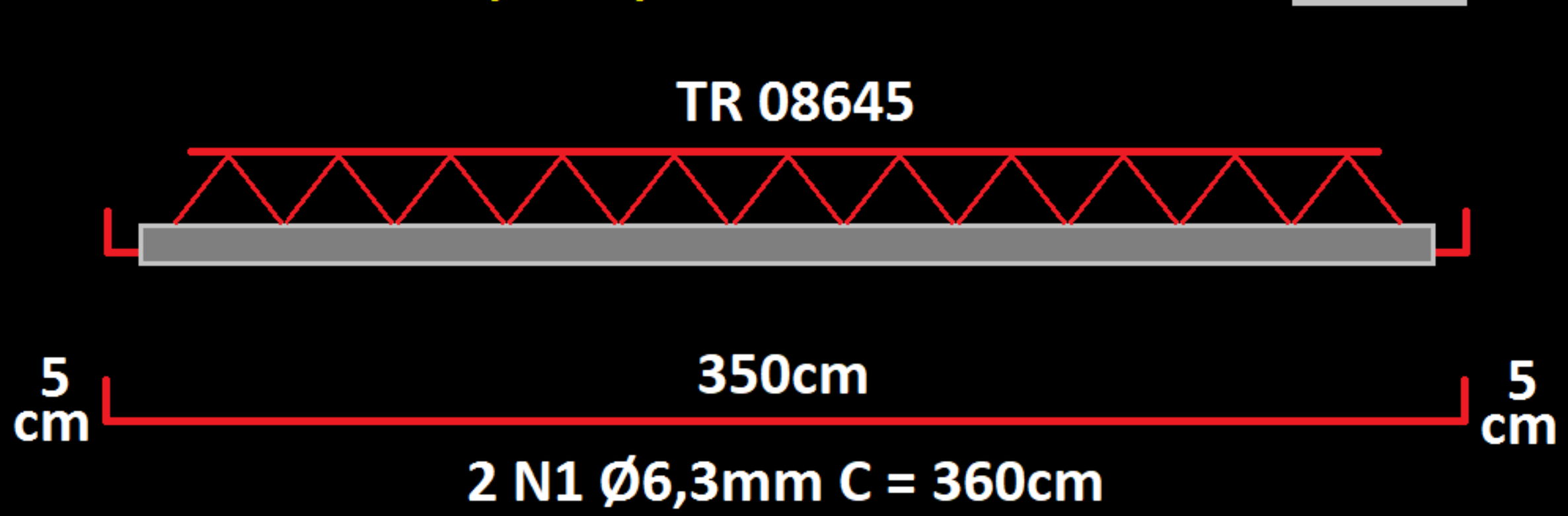
Logo, temos o necessário para calcular a área de aço da armadura complementar (A_{s2}):

$$A_{s2} = \frac{F_c - f_{yd1}.A_{s1}}{f_{yd2}} = \frac{47,43 - 52,17.0,3927}{43,48} = 0,6197cm^2$$

Se adotarmos a bitola de 6,3mm, a quantidade de barras de aço da armadura complementar em cada vigota será:

$$\text{Nº de barras} = \frac{0,6197}{\pi.(0,63^2).0,25} \cong 2 \text{ barras}$$





Espero que você tenha gostado do livro!

Se quiser conhecer minha planilha para cálculo de lajes treliçadas clique aqui

